$$a=\frac{a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}},b=\frac{b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}},i=1,2,\cdots,n,\text{则有}$$

$$\frac{a_i^2}{\sum_{i=1}^n a_i^2}+\frac{b_i^2}{\sum_{i=1}^n b_i^2}\geq 2\frac{a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}}\frac{b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}},(i=1,2,\cdots,n)$$

$$a=\frac{a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}},b=\frac{b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}},i=1,2,\cdots,n,\text{则有}$$

$$\frac{a_i^2}{\sum_{i=1}^n a_i^2}+\frac{b_i^2}{\sum_{i=1}^n b_i^2}\geq 2\frac{a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}}\frac{b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}},(i=1,2,\cdots,n)$$

$$a=\frac{a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}},b=\frac{b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}},i=1,2,\cdots,n,\text{则有}$$

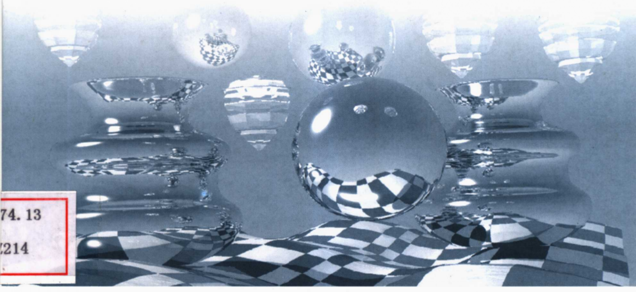
$$\frac{a_i^2}{\sum_{i=1}^n a_i^2}+\frac{b_i^2}{\sum_{i=1}^n b_i^2}\geq 2\frac{a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}}\frac{b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}},(i=1,2,\cdots,n)$$

几何凸函数

JIHE
TU
HANSHU

● 张小明 著

● 安徽大学出版社



责任编辑 谈 菁
封面设计 孟献辉

ISBN 7-81052-855-6
9 787810 528559 >

ISBN 7-81052-855-6/O·41
定价 22.00 元

几何凸函数

张小明 著

安徽大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

几何凸函数 / 张小明著. —合肥:安徽大学出版社,2004.6

ISBN 7-81052-855-6

Ⅰ.几… Ⅱ.张… Ⅲ.凸函数 Ⅳ.O174.13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 040150 号

内容摘要 几何凸函数是近几年提出的一个崭新的概念.本书是对这一课题研究成果所作的一个阶段性总结.书中先简单介绍了凸函数的几个重要性质及其应用,然后从几何凸函数的定义出发,详细介绍了几何凸函数和 Schur-几何凸函数的各种性质.并以大量的实例说明了几何凸函数这一课题的研究价值,同时也说明了几何凸函数是发现和证明不等式的一个可与凸函数媲美的强有力的工具.书末还列举了与几何凸函数有关的几个未解决的问题.

本书可供数学研究人员、大学数学系师生、中学数学教师以及数学爱好者阅读.

几何凸函数 张小明 著

出版发行	安徽大学出版社 (合肥市肥西路 3 号 邮编 230039)	**印　刷**	安徽省天歌印刷厂
联系电话	编辑部 0551-5108348 发行部 0551-5107784	**开　本**	787×960 1/16
		印　张	11.75
		字　数	210 千
电子信箱	ahdxchps@mail.hf.ah.cn	**版　次**	2004 年 6 月第 1 版
责任编辑	谈 菁	**印　次**	2004 年 6 月第 1 次印刷
封面设计	孟献辉		

ISBN 7-81052-855-6/O·41 **定价 22.00 元**

序

张小明先生写了一本有用的书,我很乐意为其做序.

本书将关于凸函数的控制不等式的理论和方法,平行地推广到几何凸函数上,用一种统一的模式推导一些已知的不等式,同时也能建立一些新的不等式.凸函数与几何凸函数在定义上是平行的,在应用上各有千秋,一个不等式有时用凸函数的性质来证明比较简单一些,有时则反之;同样,在构建一个新的不等式时,用凸函数获得的结果有时要强些,有时则用几何凸函数获得到的结果较强.书中还对几个经典不等式做出简证或推广,这些都说明了几何凸函数的研究价值.

至于凸函数与几何凸函数的关系,用专业术语来讲不叫“同构”,应该称为“共轭”.若 $f(x)$ 是凸函数则 $g(x) = \log(f(\exp(x)))$ 是几何凸函数,这样的关系叫做共轭,因为 log 和 exp 互为反函数.

既然每个几何凸函数一定与某个凸函数共轭,是否就没有必要引进几何凸函数这个概念了?还不能这么说.有人开玩笑说:你们数学家的功夫都花在证明两个本来相同的东西是相等的.这虽然是一句调侃的话,但数学家们为了研究和应用的方便,的确引进了不少相互等价的新概念,并在似乎互相平行的路径上进行探索.而这样的探索其中不少取得了有价值的成果.自然规律包括数学规律都是客观存在的,它们本来就在那里,等待着我们去发现.原先难于发现的某些规律,如

果引进哪怕是等价的新概念能使我们的探索更加便捷、更加容易些，我们就没有理由不这样做.

本书作者原来的研究方向是泛函微分方程，在发表多篇论文后，近期致力于不等式的研究. 此书是作者在不等式研究领域的第一本著作，我个人认为也是一本力作. 作者的科研条件是艰苦的，其刻苦钻研和敬业的精神尤其值得钦佩. 相信本书的问世将会促进我国在几何凸函数和不等式领域中相关的研究和应用.

杨　路

2003 年 10 月 31 日

前 言

几何凸函数是一个与凸函数平行的概念.作为一个研究课题,它在十几年以前就已经出现并取得了初步研究成果,但作为一个概念提出却是1992年的事(在不知情的情况下,1998年国内有学者也提出了这个概念).十几年过去了,有关几何凸函数的研究成果不断涌现.鉴于此,对几何凸函数的研究成果进行一次阶段性的总结,也就显得很有必要、势在必行了.本书即是作者在这方面所作的一个初步尝试.

本书力求全面反映到目前为止人们在几何凸函数方面的研究成果.大量的事实表明,几何凸函数具有凸函数同样的优点,即能够把许多已知的用不同方法得到的不等式,用一种统一的模式推导出来,是证明和推广已知不等式、发现新的不等式的一个强有力的工具;另一方面,几何凸函数与凸函数作为两个证明和发现不等式的工具来说,各有所长,不能互相替代.这两个工具具有同样的重要性,不可偏废、不能厚此薄彼.

本书的部分内容曾于2003年6月至8月在http://zgbdsyjxz.nease.net网站上公布,在中国不等式研究小组主办的内部刊物《不等式研究通讯》上发表过.书中凡从他文收录的研究成果都会以各种不同方式予以注明.除经典结论外,书中未注明的定理、推论或例题,一般都是作者首次公开面世的研究成果.

几何凸函数是一个全新的研究课题,作者自涉足这个课

题以来,就一直得到我国著名数学家、博士生导师、成都计算机科学院杨路研究员的帮助和鼓励.杨路研究员常给迷茫中的作者指明研究路线、给予研究动力,并在百忙之中为本书作序;北京联合大学的恩师石焕南教授数十次给作者寄来有关资料,以满足作者的写作要求(这是一般人难以做到的);在本书的写作过程中,湖南理工学院的萧振纲教授、徐州师范大学的张晗方教授,以及青岛职业技术学院的续铁权教授都给予了作者多次指导和不少帮助,特别是萧振纲教授还腾出宝贵的时间审阅了本书初稿,对本书的写作提出了许多建设性的意见,并作了大量的文字润色工作;作为几何凸函数的提出者之一,浙江衢州教育局教研室的李世杰老师不仅给作者提供了自己的研究成果,而且也审阅了本书初稿;西藏自治区党委组织部的刘保乾先生、重庆邮电学院的杨定华老师、浙江新昌中学的吴裕东老师、浙江电视大学海宁学院的常汉杰老师也给予了作者诸多帮助.作者在此向以上这些老师一并表示诚挚的谢意.

浙江电视大学海宁学院的领导对作者的学术研究,一贯予以精神和物质上的支持,在此也表示由衷的感谢.

由于作者偏居一隅,信息不灵,虽然本书"力求全面",但也难免挂一漏万,使有些读者在几何凸函数方面的重要研究成果没有在本书中反映出来,尚希有关读者鉴谅.另外,由于作者才疏学浅,书中难免有这样或那样的错误和不足,恳请读者不吝指教(zjzxm79@sohu.com 314400 浙江省海宁市文苑路 81 号浙江电视大学海宁学院).

作者的硕士研究生导师、安徽大学数学系郑祖庥教授一直牵挂着作者的学习和生活,谨以此书献给这位令人尊敬的老人.

张小明于海宁水月亭

2004 年 1 月 16 日

目　次

第一章　基础知识

本章介绍几个经典不等式、一些凸函数及其控制知识.其中大多数定义和定理都能在文献[1]－[5]中查到出处或证明,较复杂的证明不在这里给出.

先列举本书几个常用的记号:N 为自然数集,N_{++} 为正自然数集,R 为实数集,R_+ 为非负实数集,R_{++} 为正实数集,R^n 为 n 维实向量空间,R^n_+ 为 n 维非负实向量集,R^n_{++} 为 n 维正实向量集,设 $I_1,I_2,\cdots,I_n,I$ 为区间,记

$$I^n = \{(a_1,a_2,\cdots,a_n) \mid a_i \in I, i = 1,2,\cdots,n\},$$

$$I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n = \{(a_1,a_2,\cdots,a_n) \mid a_i \in I_i, i = 1,2,\cdots,n\}.$$

第一节　几个经典不等式

在本节中,将记述与本书有关的一些经典不等式.

定理 1.1　设 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in R^n_{++}$,其算术平均 $A(a)$ 与几何平均 $G(a)$ 分别设为:$A(a)=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$,$G(a)=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$,则有

$$A(a) \geq G(a),$$

等式成立当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

定理 1.1 称为算术－几何平均不等式,它显然与下面的定理 1.1* 是等价的.本书的第四章的第七节中,我们将给出它的一个极为简单的证明.

定理 1.1*　设 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in R^n_{++}$,则有

$$a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n \geq n a_1 a_2 \cdots a_n,$$

等式成立当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

定理 1.2 (*Cauchy* 不等式)　设 $a_i,b_i\in R$,$i=1,2,\cdots,n$,则有

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2,$$

等式成立当且仅当 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$(其中当分母为 0,则分子亦为 0).

证明 如果$\sum_{i=1}^{n}a_i^2=0$或$\sum_{i=1}^{n}b_i^2=0$,则结论显然成立;下设$\sum_{i=1}^{n}a_i^2\neq0$且$\sum_{i=1}^{n}b_i^2\neq0$,因为对任意实数a,b都有

$$a^2+b^2\geq 2ab,$$

分别令$a=\frac{a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}}, b=\frac{b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}}, i=1,2,\cdots,n$,则有

$$\frac{a_i^2}{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\frac{b_i^2}{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\geq 2\frac{a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}}\frac{b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}},(i=1,2,\cdots,n)$$

求和即得

$$2\geq\frac{\sum_{i=1}^{n}2a_ib_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2}},$$

故

$$(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)(\sum_{i=1}^{n}b_i^2)\geq(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)^2.$$

定理 1.3 (*Hölder* **不等式**) 如果$x_i,y_i\in R_+, i=1,2,\cdots,n, p>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,则有

$$(x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p)^{\frac{1}{p}}(y_1^q+y_2^q+\cdots+y_n^q)^{\frac{1}{q}}$$
$$\geq x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n,$$

等式成立当且仅当$\frac{x_1^p}{y_1^q}=\frac{x_2^p}{y_2^q}=\cdots=\frac{x_n^p}{y_n^q}$(其中当分母为0,则分子亦为0).

杨定华先生在本书的第四章的第六节将给出一个简单的证明,**Hölder** 不等式的积分形式如下:

定理 1.4 设$f(x)$和$g(x)$是定义在$[a,b]$上的非负函数,在$[a,b]$上可积,且常数$p,q>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,则有

$$(\int_a^b f^p(x)dx)^{\frac{1}{p}}(\int_a^b g^q(x))^{\frac{1}{q}}dx\geq\int_a^b f(x)g(x)dx, \quad (1.1)$$

等式成立当且仅当存在实数k,使得$f^p(x)\overset{a.e}{=}kg^q(x)$或$g^q(x)\overset{a.e}{=}kf^p(x)$.

证明 对于函数$f^p(x), g^q(x)$和$f(x)\cdot g(x)$在$[a,b]$上的可积性,可由

文献[9]的第四章第二节的例4和例5得到，往证(1.1)式成立即可.

在$[a,b]$均取$n+1$个分点$x_n(i), i=0,1,\cdots,n$，使得$a=x_n(0)<x_n(1)<\cdots<x_n(n)=b$，在$[x_n(i),x_n(i+1)]$上任取点$\zeta_n(i), i=1,2,\cdots,n$，记$\Delta_n=\max\{x_n(i+1)-x_n(i), i=1,2,\cdots,n\}=\frac{b-a}{n}$，且当$n\to+\infty$时，$\Delta_n\to 0$，则有

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}f^p(\zeta_n(i))\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}g^q(\zeta_n(i))\right)^{\frac{1}{q}}\\&=\frac{b-a}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}f^p(\zeta_n(i))\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}g^q(\zeta_n(i))\right)^{\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

由定理1.3知

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}f^p(\zeta_n(i))\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}g^q(\zeta_n(i))\right)^{\frac{1}{q}}\\&\geq\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\zeta_n(i))g(\zeta_n(i)),\end{aligned}$$

令$n\to+\infty$，由定积分定义即知

$$\left(\int_a^b f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b g^q(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\geq\int_a^b f(x)g(x)dx.$$

推论1.1 设$f(x)$是定义在$[a,b]$上且取值为正的可积函数，则有

$$\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx\geq(b-a)^2. \tag{1.2}$$

证明 函数$\frac{1}{f(x)}$在$[a,b]$上的可积性，可参考文献[9]的第四章第二节的例5而得到. 在定理1.4中，令$p=q=2$，用$\sqrt{f(x)}$代入$f(x)$，用$\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$代入$g(x)$，整理即可得推论(1.2)式.

定理1.5 (*Jensen* 不等式) 设ϕ是$[\alpha,\beta]$上的凸函数，函数f和p在$[a,b]$上可积，$\alpha\leq f(x)\leq\beta$，$p(x)\geq 0$，$x\in[a,b]$且$\int_a^b p(x)dx=1$，则有

$$\phi\left(\int_a^b p(x)f(x)dx\right)\leq\int_a^b p(x)\phi(f(x))dx.$$

第二节 凸集与凸函数

定义2.1 设集合$H\subseteq R^n$，如果任取$x,y\in H$，$a\in[0,1]$，都有$ax+(1-a)y\in H$，则称H为凸集.

定理 2.1 设集合 $H\subseteq R^n$ 是闭的，则 H 为凸集的充分必要条件是：对任意 $x,y\in H$，都有 $\frac{x+y}{2}\in H$.

证明 必要性，任取 $x,y\in H$，在定义 2.1 中取 $a=\frac{1}{2}$ 即可.

充分性，若对任意 $x,y\in H$，有 $\frac{x+y}{2}\in H$，以 $\frac{x+y}{2}$ 代 x，或以 $\frac{x+y}{2}$ 代 y，分别整理，有

$$\frac{x+3y}{4}\in H, \tag{2.1}$$

$$\frac{3x+y}{4}\in H, \tag{2.2}$$

在(2.1)式和 (2.2)式中，以 $\frac{x+y}{2}$ 代 x，得两个不等式，左边 x 的系数为 $\frac{1}{8}$ 和 $\frac{3}{8}$；以 $\frac{x+y}{2}$ 代 y，又得两个不等式，左边 x 的系数为 $\frac{5}{8}$ 和 $\frac{7}{8}$；依此类推，x 的系数可为 $\frac{1}{2^n},\frac{3}{2^n},\cdots,\frac{2^{n-1}-1}{2^n}$，此时相应 y 的系数可为 $1-\frac{1}{2^n},1-\frac{3}{2^n},\cdots,1-\frac{2^{n-1}-1}{2^n}$；据对称性，$y$ 的系数可为 $\frac{1}{2^n},\frac{3}{2^n},\cdots,\frac{2^{n-1}-1}{2^n}$，相应 x 的系数为 $1-\frac{1}{2^n},1-\frac{3}{2^n},\cdots,1-\frac{2^{n-1}-1}{2^n}$. 这样当 $n\to+\infty$ 时，以上所有式子左边 x 的系数集合在$[0,1]$中稠密，又因 $H\subseteq R^n$ 是闭集，由此即知定理 2.1 成立.

凸集有一个很直观的特征：连结点集内的任两点的线段都在这个点集内.

定义 2.2 设 $H\subseteq R^n$ 为凸集，函数 $\phi:H\to R$，任取 $x,y\in H$，

（ⅰ）如果 $\phi(\frac{x+y}{2})\le\frac{1}{2}\phi(x)+\frac{1}{2}\phi(y)$ 恒成立，则称 ϕ 在 H 上为凸函数.

（ⅱ）如果 $\phi(\frac{x+y}{2})\ge\frac{1}{2}\phi(x)+\frac{1}{2}\phi(y)$ 恒成立，则称 ϕ 在 H 上为凹函数.

显然如果 ϕ 是凸函数，则 $-\phi$ 是凹函数，因此往下只需讨论凸函数即可，所有关于凸函数的不等式反向即得凹函数的相应不等式.

定理 2.2 设 $H\subseteq R^n$ 为凸集，函数 $\phi:H\to R$ 连续，任取 $x,y\in H,a\in[0,1]$，则 ϕ 在 H 上为凸函数当且仅当

$$\phi(ax+(1-a)y)\le a\phi(x)+(1-a)\phi(y)$$

恒成立.

证明 因

$$\phi(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2}\phi(y), \tag{2.3}$$

对任取 $x, y \in H$ 都成立,在(2.3)式中,以$\frac{x+y}{2}$代 x,或以$\frac{x+y}{2}$代 y,则分别有

$$\phi(\frac{x+3y}{4}) \leq \frac{1}{4}\phi(x) + \frac{3}{4}\phi(y), \tag{2.4}$$

$$\phi(\frac{3x+y}{4}) \leq \frac{3}{4}\phi(x) + \frac{1}{4}\phi(y), \tag{2.5}$$

这称第一组代换;对于(2.4)式和 (2.5)式,以$\frac{x+y}{2}$代 x,得两个不等式,右边 $\phi(x)$的系数$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}$,以$\frac{x+y}{2}$代 y,又得两个不等式,右边 $\phi(x)$的系数为$\frac{5}{8}, \frac{7}{8}$,这称第二组代换,…,当进行第 $n-1$ 组代换时,共有 2^{n-1}个不等式,x 处用$\frac{x+y}{2}$代人时,第 $n-2$ 组代换中的不等式的右边 $\phi(x)$的系数各除以 2 后,成为了第 $n-1$ 组代换中的不等式的右边 $\phi(x)$的系数,分别是$\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \cdots, \frac{2^{n-1}-1}{2^n}$,另外,以$\frac{x+y}{2}$代 y 时,根据对称性,右边 $\phi(y)$的系数分别是$\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \cdots, \frac{2^{n-1}-1}{2^n}$,$\phi(x)$的系数分别为 $1-\frac{1}{2^n}, 1-\frac{3}{2^n}, \cdots, 1-\frac{2^{n-1}-1}{2^n}$,即 $\phi(x)$的系数全部为$\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \cdots, \frac{2^n-1}{2^n}$,当 $n \to +\infty$时,以上所有不等式右边 $\phi(x)$的系数集合在$[0,1]$中稠密,根据函数 ϕ 的连续性,即知定理 2.2 成立.

定理 2.3 设函数 ϕ 在开区间$I \subseteq R$ 上二次可微,则 ϕ 在I 上为凸函数当且仅当 $\phi''(t) \geq 0$ 对 $t \in I$ 恒成立.

设集合 $H \subseteq R^n$,函数 $\phi: H \to R$,记

$$L(x) = \begin{pmatrix} \phi''_{11} & \phi''_{12} & \cdots & \phi''_{1n} \\ \phi''_{21} & \phi''_{22} & \cdots & \phi''_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi''_{n1} & \phi''_{n2} & \cdots & \phi''_{nn} \end{pmatrix}.$$

定理 2.4 设 $H\subseteq R^n$ 为开凸集，ϕ 在 H 上二次可微，则 ϕ 在 H 上为凸函数当且仅当 $L(x)$ 在 H 上半正定.

定理 2.5 设 $H\subseteq R^n$ 为凸集，函数 $\phi: H\to R$ 连续，则 ϕ 为 H 上的凸函数当且仅当对任意 $x^{(i)}\in H,\lambda_i>0,i=1,2,\cdots,m$，当 $\sum_{i=1}^m\lambda_i=1$ 时，恒有

$$\phi\left(\sum_{i=1}^m\lambda_i x^{(i)}\right)\leq\sum_{i=1}^m\lambda_i\phi(x^{(i)}). \tag{2.6}$$

(2.6)式就是著名的 ***Jensen*** 不等式.

定理 2.6 设 $H\subseteq R^n$ 为凸集，函数 $\phi: H\to R$ 连续，则 ϕ 为 H 上的凸函数当且仅当对任意 $x^{(i)}\in H,i=1,2,\cdots m$，恒有

$$\phi\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m x^{(i)}\right)\leq\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m\phi(x^{(i)}). \tag{2.7}$$

定理 2.7 定义在区间 $[a,b]$ 上的连续函数 f 为凸函数的充分必要条件是：对于 $[a,b]$ 中任意 $x_1<x_2<x_3$，恒有

$$\begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) & 1\\ x_2 & f(x_2) & 1\\ x_3 & f(x_3) & 1\end{vmatrix}\geq 0. \tag{2.8}$$

定理 2.8 若一个凸函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，则

(ⅰ) f 在 (a,b) 上处处有单侧导数.

(ⅱ) 对于任意 $x\in(a,b)$，恒有 $f'_-(x)\leq f'_+(x)$.

第三节　实向量的控制

定义 3.1 设向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$，$x_{[1]},x_{[2]},\cdots,x_{[n]}$ 表示 x 中分量的递减重排，若对于 $x,y\in R^n$，有

$$\sum_{i=1}^k x_{[i]}\geq\sum_{i=1}^k y_{[i]},k=1,2,\cdots,n-1,$$

$$\sum_{i=1}^n x_{[i]}=\sum_{i=1}^n y_{[i]},$$

则称 x 控制 y，记为 $x\succ y$.

例 1 设 $x=(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4})$，$y=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$，则 x,y 的重排分别为 $(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ 和 $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$，因有

$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{3} + \frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3},$$

成立，所以 $x \succ y$.

定理 3.1 设向量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n$，$y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in R^n$，用 $x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(n)}$ 表示 x 中分量的递增重排，则

$$(x_{[1]} + y_{[1]}, \cdots, x_{[n]} + y_{[n]}) \succ (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$$
$$\succ (x_{[1]} + y_{(1)}, \cdots, x_{[n]} + y_{(n)}).$$

定义 3.2 对单位矩阵作一次交换任意二行的行变换，所得的矩阵称置换矩阵.

如 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 为三阶置换矩阵.

定义 3.3 集合 $H \subseteq R^n$ 称为对称的，如果对于任意的 $x \in H$ 和任意的置换矩阵 G，都有 $xG \in H$.

例 2 设 $A = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i > 0, i = 1,2,3\}$，因任取 $(a,b,c) \in A$，有

$$(a,b,c)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (a,c,b) \in A,$$

$$(a,b,c)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (b,a,c) \in A,$$

$$(a,b,c)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (c,b,a) \in A,$$

所以 A 为 R^3 中的对称集.

定义 3.4 函数 ϕ 在对称集 H 上称为对称的，如果对于任意的 $x \in H$ 和任意的置换矩阵 G，都有 $\phi(xG) = \phi(x)$.

例 3 设 $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_1}{x_3}$，交换任两个自变

量，函数值保持不变，所以 f 为对称函数.

定理 3.2 设集合 $H\subseteq R^n$ 为对称凸集，函数 ϕ 在 H 上为对称凸函数，则对任意 $x,y\in H$，当 $x\succ y$ 时，恒有 $\phi(x)\geq\phi(y)$.

定理 3.3 设集合 $H\subseteq R^n$ 为对称凸集，函数 ϕ 在 H 上为对称凹函数，则对任意 $x,y\in H$，当 $x\succ y$ 时，恒有 $\phi(x)\leq\phi(y)$.

例 4 设 $n\geq 2$，函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n$，其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R_+^n$，求证：

$$\frac{x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n}{n}\geq\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n.$$

证明 对于 f 相对于定理 2.4 的 $L(x)$ 为

$$L(x)=\begin{pmatrix} f_{11}'' & f_{12}'' & \cdots & f_{1n}'' \\ f_{21}'' & f_{22}'' & \cdots & f_{2n}'' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}'' & f_{n2}'' & \cdots & f_{nn}'' \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} n(n-1)x_1^{n-2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n(n-1)x_2^{n-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n(n-1)x_n^{n-2} \end{pmatrix},$$

$L(x)$ 显然是为正定阵，由定理 2.4 知 f 为凸函数，又显然有

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\succ\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n},\frac{x_1+\cdots+x_n}{n},\cdots,\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right),$$

根据定理 3.2 有

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n$$

$$\geq f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n},\cdots,\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)=n\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n,$$

即

$$\frac{x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n}{n}\geq\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n.$$

这个证明干净利落，正如[4]中所说的，不等式的控制证明能把许多已有的从不同方法得来的不等式，用一种统一的方法简便地推导出来，它更是推广已有的不等式、发现新的不等式的一种强有力的工具.

用控制不等式的理论和方法来证明不等式时，有时判断一个 n 元函数是 n 维凸函数是比较困难的. 为此，我们引进 Schur－凸(凹)函数的概念.

定义 3.3 设集合 $H\subseteq R^n$，$\phi: H\to R$，任取 $x,y\in H$ 当 $x\succ y$ 时，若 $\phi(x)\geq(\leq)\phi(y)$ 恒成立，则称 ϕ 为 H 上的 Schur－凸(凹)函数，简称 S－凸(凹)函数.

定理 3.4 设 ϕ 是对称集 $H\subseteq R^n$ 上的 S－凸(凹)函数，则 ϕ 是 H 上的对称函数.

证明 只证 ϕ 为 S－凸函数的情形，任取 $x\in H$，G 为任一 n 阶置换矩阵，由于 $xG\in H$，$xG\succ x\succ xG$，从而有

$$\phi(xG)\geq\phi(x)\geq\phi(xG),$$

$$\phi(xG)=\phi(x),$$

所以 ϕ 是 H 上的对称函数.

定理 3.5 若 ϕ 是对称凸集 H 上的对称凸(凹)函数，则 ϕ 是 H 上的 S－凸(凹)函数.

定理 3.6 设集合 $H\subseteq R^n$ 是有内点的对称凸集，$\phi: H\to R$ 连续，且在 H 中的内点都可微，则 ϕ 在 H 上为 S－凸函数的充分必要条件是 ϕ 在 H 上对称且对 H 的任意内点 x，都有

$$(x_1-x_2)(\phi_1'-\phi_2')\geq 0.$$

定理 3.7 设集合 $H\subseteq R^n$ 是有内点的对称凸集，$\phi: H\to R$ 为连续，且在 H 的内点都可微，则 ϕ 在 H 上为 S－凹函数的充分必要条件是 ϕ 在 H 上对称且对 H 的任意内点 x，都有

$$(x_1-x_2)(\phi_1'-\phi_2')\leq 0.$$

定理 3.6 和 3.7 的作用是巨大的，它可以导出一大批著名不等式，读者可参考文献[3]和[12]提及的有关文章，这里仅举一例说明，以下是[3]第 98 页的一个著名结果.

例 6 设 $L(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-y}{\ln x-\ln y}, & \text{当 } x\neq y, x,y>0 \text{ 时},\\ x, & \text{当 } x=y \text{ 时},\end{cases}$ 则

$$L(x,y)\leq\frac{x+y}{2}.$$

证明 因为

$$\frac{\partial L(x,x)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{L(x+\Delta x,x)-L(x,x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{x+\Delta x-x}{\ln(x+\Delta x)-\ln x}-x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}-\frac{x}{\Delta x}\right],$$

令$\frac{\Delta x}{x}=\lambda$，则两次利用洛必塔法则，有

$$\frac{\partial L(x,x)}{\partial x}=\lim_{\lambda\to 0}\left[\frac{1}{\ln(1+\lambda)}-\frac{1}{\lambda}\right]$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\lambda-\ln(1+\lambda)}{\lambda\ln(1+\lambda)}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+\lambda}}{\ln(1+\lambda)+\frac{\lambda}{1+\lambda}}$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\lambda}{(1+\lambda)\ln(1+\lambda)+\lambda}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{2+\ln(1+\lambda)}=\frac{1}{2},$$

所以

$$\frac{\partial L(x,y)}{\partial x}=\begin{cases}\dfrac{\ln x-\ln y+\frac{y}{x}-1}{(\ln x-\ln y)^2}, & x\neq y,x,y>0\\ \dfrac{1}{2}, & x=y\end{cases},$$

同理

$$\frac{\partial L(x,y)}{\partial y}=\begin{cases}\dfrac{\ln y-\ln x+\frac{x}{y}-1}{(\ln x-\ln y)^2}, & x\neq y,x,y>0\\ \dfrac{1}{2}, & x=y\end{cases},$$

此时当 $x=y$ 时，有

$$(x-y)\left(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y}\right)=0;$$

当 $x\neq y$ 时有

$$(x-y)\left(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y}\right)=(x-y)\frac{2\ln x-2\ln y+\frac{y}{x}-\frac{x}{y}}{(\ln x-\ln y)^2},$$

考虑函数

$$f(x)=2\ln x-2\ln y+\frac{y}{x}-\frac{x}{y},x\geq y,$$

$$f'(x)=\frac{2}{x}-\frac{y}{x^2}-\frac{1}{y}=\frac{-(x-y)^2}{x^2y}\leq 0,$$

且又 $f(y)=0$，所以当 $x>y$ 时，

$$2\ln x-2\ln y+\frac{y}{x}-\frac{x}{y}<0,$$

$$(x-y)\left(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y}\right)=(x-y)\frac{2\ln x-2\ln y+\frac{y}{x}-\frac{x}{y}}{(\ln x-\ln y)^2}<0,$$

至此我们证明了 $L(x,y)$ 为 $S-$凹函数，由 $(x,y)\succ\left(\frac{x+y}{2},\frac{x+y}{2}\right)$ 即知：

$$L(x,y)\le L\left(\frac{x+y}{2},\frac{x+y}{2}\right)=\frac{x+y}{2}.$$

其实在例 6 的条件下，[3]中还证明了 $L(x,y)\ge\sqrt{xy}$ 成立，本书的第五章第二节将通过证明 $L(x,y)$ 为 $S-$几何凸函数来得到这个不等式，并且加强此结果.

第四节　关于凸函数的一些不等式

引理 4.1　设 f 是 $[a,b]$ 上的连续的凸函数，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$n\ge2$，则 $f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)$ 在 $[a,b]^n$ 上是 $S-$凸函数.

这是[4]第 56 页的例 3.

定理 4.1 (*Hadamard* 不等式)　设 f 是 $[a,b]$ 上的连续的凸函数，则有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

证明　（i）当 f 为凸函数时，设点 $x_n(i)=a+\frac{i}{n}(b-a)$，$i=1,2,\cdots,n$，则由定积分定义知

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{b-a}\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f(x_n(i))$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(x_n(i))\ge\lim_{n\to+\infty}f\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_n(i)}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}f\left(\frac{na+\frac{n(n+1)}{2n}(b-a)}{n}\right)=f\left(\frac{a+b}{2}\right);$$

又

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{b-a}\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\left[\sum_{i=1}^{n-1}f(x_n(i))+f(x_n(n))\right]$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n-1}f(x_n(i))+f(b)\right]=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}f(x_n(i))$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}\Big[\sum_{i=1}^{n-1}f(x_n(i)) + \sum_{i=1}^{n-1}f(x_n(n-i))\Big]$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_n(i)) + f(x_n(n-i))],$$

显然(a,b)控制$(x_n(i),x_n(n-i))$,由引理 4.1 知:$f(x)+f(y)$在$[a,b]^2$是 S - 凸函数,所以有

$$f(x_n(i)) + f(x_n(n-i)) \le f(a) + f(b),$$

进而有

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}[f(b)+f(a)] = \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

定理 4.2 (*Bellman* 不等式) 设 $a_1 \ge a_2 \ge \cdots a_{2n-1} \ge a_{2n} \ge 0, n \ge 1$,且 f 是$[0,a_1]$上的连续的凸函数,则有

$$\sum_{i=1}^{2n-1}(-1)^{i-1}f(a_i) \ge f\Big(\sum_{i=1}^{2n-1}(-1)^{i-1}a_i\Big), \tag{4.1}$$

若再设 $f(0)\le 0$,则有

$$\sum_{i=1}^{2n}(-1)^{i-1}f(a_i) \ge f\Big(\sum_{i=1}^{2n}(-1)^{i-1}a_i\Big). \tag{4.2}$$

证明 因

$$a_1 \ge a_2 \text{ 或 } a_1 \ge a_1 - a_2 + \cdots - a_{2n-2} + a_{2n-1};$$

$$a_1 + a_3 \ge a_2 + a_4$$

或

$$a_1 + a_3 \ge a_2 + (a_1 - a_2 + \cdots - a_{2n-2} + a_{2n-1});$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}$$

$$= a_2 + a_4 \cdots + a_{2n-2} + (a_1 - a_2 + \cdots - a_{2n-2} + a_{2n-1}),$$

故

$$(a_1, a_3, \cdots, a_{2n-1}) \succ (a_2, \cdots, a_{2n-2}, a_1 - a_2 + \cdots - a_{2n-2} + a_{2n-1}),$$

又由引理 4.1 知 $f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)$在$[0,a_1]^n$ 上是S - 凸函数,所以

$$f(a_1) + f(a_3) + \cdots + f(a_{2n-1})$$

$$\ge f(a_2) + \cdots + f(a_{2n-2}) + f(a_1 - a_2 + \cdots - a_{2n-2} + a_{2n-1}),$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2n-1}(-1)^{i-1}f(a_i) \ge f\Big(\sum_{i=1}^{2n-1}(-1)^{i-1}a_i\Big).$$

同理可证

$$(a_1,a_3,\cdots,a_{2n-1},0)\succ(a_2,\cdots,a_{2n},a_1-a_2+\cdots+a_{2n-1}-a_{2n}),$$

所以

$$f(a_1)+f(a_3)+\cdots+f(a_{2n-1})+f(0)\geqslant$$
$$f(a_2)+\cdots+f(a_{2n})+f(a_1-a_2+\cdots+a_{2n-1}-a_{2n}),$$

再由 $f(0)\leq 0$ 即知(4.2)式成立.

1956 年, *Brunk. H. D.* 推广 *Bellman* 不等式得到:

定理 4.3 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续的凸函数, $f(0)\leq 0$, 若 $a\leq a_n\leq\cdots a_2\leq a_1\leq b$, $0\leq p_n\leq\cdots\leq p_2\leq p_1\leq 1$, 则有

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}p_kf(a_k)\geq f[\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}p_ka_k].$$

定理 4.4(*Olkin* 不等式) 设 $a_1\geq a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geq 0$, $0\leqslant p_n\leq\cdots\leq p_2\leq p_1\leq 1$, 且 $f(x)$ 是区间 $[0,a_1]$ 上的连续的凸函数, 则有

$$f[\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}p_ka_k]\leq$$
$$[1-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}p_k]f(0)+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}p_kf(a_k).$$

定理 4.5(*Petrovic′* 不等式) 设 f 是 $[0,a]$ 上的连续的凸函数, $a_i(i=1,2,\cdots,n)$, $\sum_{i=1}^{n}a_i$ 都在 $[0,a]$ 内, 则有

$$\sum_{i=1}^{n}f(a_i)\leq f(\sum_{i=1}^{n}a_i)+(n-1)f(0).$$

证明 显然

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)\prec(a_1+a_2+\cdots+a_n,0,0,\cdots,0),$$

再由引理 4.1 和 S-凸函数的定义即知所述不等式成立.

定理 4.6 设 $\varphi(x)$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上连续的凸函数, 数列 $\{a_k\}$ 非负递增, 则有

$$\varphi(0)+\sum_{k=1}^{\infty}\{\varphi(ka_k)-\varphi[(k-1)a_k]\}\leq\varphi(\sum_{k=1}^{\infty}a_k).$$

定理 4.7 设 f 是 R 上的连续的凸函数, 则对于 $0<\alpha\leq\beta$, $x\geq 0$, 有

$$\beta[f(\frac{x}{\beta})-f(0)]\leq\alpha[f(\frac{x}{\alpha})-f(0)].$$

定理 4.8 (*Popoviciu* 不等式) 设 $\varphi(x)$ 是 $[a,b]$ 上连续的凸函数, 则对

于任意的 $x_k \in [a,b], k=1,2,\cdots,n$，有

$$\sum_{1\leq k_1<\cdots<k_m\leq n}\varphi\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}x_{k_j}\right)\leq\frac{1}{m}\binom{n-2}{m-2}\left\{\frac{n-m}{m-1}\sum_{k=1}^{n}\varphi(x_k)+n\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\right\}$$

其中 $n\geq 3, 2\leq m\leq n-1$.

定理 4.9 设 f 是 $[a,b]$ 上的连续的凸函数，且 f 在区间端点的单侧导数 $f'_+(a), f'_-(b)$ 存在且有限，则存在常数 M，使得对于 $[a,b]$ 中的任意 x,y，都有

$$|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|.$$

第二章　一维几何凸函数

在几何凸函数没有正式定义之前，已有文[27]、[48]利用一种变换，来研究它的一些性质，而正式定义应该由[46]最先给出的，在不知情的情况下，国内的文[15]、[27]中出现这个概念，文[15]中定义了一类函数，其中包括几何凸函数，并提出了有关其等价性定义的几个猜想；文[16]、[17]、[24]和[22]分别解决文[15]的几个猜想，且[17]还讨论了几何凸函数的定义域和值域. 文[18]提出了对数控制这个概念，得到了国内第一个几何凸函数的控制不等式，由于和向量控制联系起来了，这使得几何凸函数的研究踏上了一个新的台阶. 文[19]给出国内第一个一维几何凸函数的微分判据. 同时[14]、[47]也开始了几何凸函数的研究，也得到了几个定义之间的相互等价性、一维几何凸函数的微分判据，且[14]也引入对数控制等概念. 文[21]利用几何凸函数的性质，得到了一个有关排序的不等式. 文[23]定义了 N 维几何凸函数，得到了著名的 ***Hölder*** 不等式的一个简单证明，文[25]指出了[14]、[18]中的一个定理与 ***Karamata*** 控制不等式是相互等价的.

本书要定义几个特殊的运算：$\ln 0=-\infty$，$e^{-\infty}=0$，$\ln(+\infty)=+\infty$，$e^{+\infty}=+\infty$，读者可以用极限的思想理解这些定义.

第一节　一维几何凸函数的定义

在文[15]中有这样的一个定义：

定义 1.1　设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果对于任意 $x_1,x_2\in I$，有 $f(\sqrt{x_1x_2})\leq\sqrt{f(x_1)f(x_2)}$，那么称 $f(x)$ 在 I 上是几何下凸的；若不等式反向，称 $f(x)$ 在 I 上是几何上凸的.

同时文[27]也有类似定义，本文分别称它为几何凸函数和几何凹函数，[15]还得到了以下结果.

定理 1.1　设 $f(x)$ 是区间 I 上的几何凸函数，则对一切 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in$

I,有

$$f(\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n})\leq\sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)}.$$

当 $f(x)$是几何凹函数时,上式不等式反向.

证明 用倒推数学归纳法证之.

(ⅰ)根据定义 1.1,$n=2$ 时成立,假设 $n=2^k,k\in N_{++}$,命题成立,下证 $n=2^{k+1}$的情形,

$$\begin{aligned}f(\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n})&=f\left(\sqrt{\sqrt[\frac{n}{2}]{x_1\cdots x_{\frac{n}{2}}}\sqrt[\frac{n}{2}]{x_{\frac{n}{2}+1}\cdots x_n}}\right)\\&\leq\sqrt{f(\sqrt[\frac{n}{2}]{x_1\cdots x_{\frac{n}{2}}})f(\sqrt[\frac{n}{2}]{x_{\frac{n}{2}+1}\cdots x_n})}\\&\leq\sqrt{\sqrt[\frac{n}{2}]{f(x_1)\cdots f(x_{\frac{n}{2}})}\sqrt[\frac{n}{2}]{f(x_{\frac{n}{2}+1})\cdots f(x_n)}}\\&=\sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)},\end{aligned}$$

所以命题对 $n=2^{k+1}$也成立.

(ⅱ)假设 $n=k+1,k\in N_{++}$,命题成立,下证 $n=k$ 的情形,因

$$f(\sqrt[k+1]{x_1x_2\cdots x_{k+1}})\leq\sqrt[k+1]{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_{k+1})},$$

已假设成立,令 $x_{k+1}=(x_1x_2\cdots x_k)^{\frac{1}{k}}$,则

$$\begin{aligned}f\left(\sqrt[k+1]{(x_1x_2\cdots x_k)^{\frac{k+1}{k}}}\right)&\leq\sqrt[k+1]{f(x_1)f(x_2)\cdots f((x_1x_2\cdots x_k)^{\frac{1}{k}})},\\f(\sqrt[k]{x_1x_2\cdots x_k})&\leq\sqrt[k+1]{f(x_1)f(x_2)\cdots f(\sqrt[k]{x_1x_2\cdots x_k})},\\f^{\frac{k}{k+1}}(\sqrt[k]{x_1x_2\cdots x_k})&\leq\sqrt[k+1]{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_k)},\\f(\sqrt[k]{x_1x_2\cdots x_k})&\leq\sqrt[k]{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_k)},\end{aligned}$$

所以命题对 $n=k$ 也成立.

根据倒推数学归纳法原理,定理 1.1 得证.

文[17]与[24]分别指出几何凸(凹)函数的定义域和值域,必须为非负实数集的子集(本书定义在正实数集的子集上),并解决了[15]提出的一个猜想,即

定理 1.2 设 $f(x)$是区间 I 上的连续的几何凸函数,设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n>0$,满足 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$,则对一切 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in I$,有:

$$f(x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n})\leq f^{\lambda_1}(x_1)f^{\lambda_2}(x_2)\cdots f^{\lambda_n}(x_n).$$

证明 设集合 $H=\{\ln x\mid x\in I\}$,令 $g(x)=\ln f(e^x),x\in H$,则有

$$g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\ln f\left(e^{\frac{x_1+x_2}{2}}\right)=\ln f\left(\sqrt{e^{x_1x_2}}\right)$$

$$\leq \ln\left(\sqrt{f(e^{x_1})f(e^{x_2})}\right)=\frac{1}{2}[\ln f(e^{x_1})+\ln f(e^{x_2})],$$

$$g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leq\frac{1}{2}[g(x_1)+g(x_2)],$$

又 $f(x)$是连续函数,所以 $g(x)$也是连续函数,由第一章的定理 2.5 有

$$g(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n)\leq\lambda_1g(x_1)+\lambda_2g(x_2)+\cdots+\lambda_ng(x_n),$$

$$\ln f(e^{\lambda_1x_1}e^{\lambda_2x_2}\cdots e^{\lambda_nx_n})\leq\lambda_1\ln f(e^{x_1})+\lambda_2\ln f(e^{x_2})+\cdots+\lambda_n\ln f(e^{x_n}),$$

$$f(e^{\lambda_1x_1}e^{\lambda_2x_2}\cdots e^{\lambda_nx_n})\leq f^{\lambda_1}(e^{x_1})f^{\lambda_2}(e^{x_2})\cdots f^{\lambda_n}(e^{x_n}),$$

再将 e^{x_i} 换为 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$,便知定理 1.2 成立.

以上工作都是在一维空间上进行的.本章将在正实数集 R_{++} 的子集上讨论几何凸函数.由于连续函数具有保号性,因此并不影响某些结论在原点处成立,关于这一点不再说明.

定义 1.2　设取值为正的函数 $f(x)$在区间 $I\subseteq R_{++}$ 上有定义且连续,如果存在自然数 $n\geq2$,对于任一 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in I$ 和 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n>0$,当 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$ 时,有

$$(\text{i})\ f(\sqrt{x_1x_2})\leq\sqrt{f(x_1)f(x_2)},\tag{1.1}$$

$$(\text{ii})\ f(\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n})\leq\sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)},\tag{1.2}$$

$$(\text{iii})\ f(x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n})\leq f^{\lambda_1}(x_1)f^{\lambda_2}(x_2)\cdots f^{\lambda_n}(x_n),\tag{1.3}$$

之一成立,则称 $f(x)$在 I 上是几何凸函数;若不等式反向,称 $f(x)$在 I 上是几何凹函数.

由定理 1.1 和定理 1.2 易知:(1.1)式、(1.2)式和(1.3)式是相互等价的,以下称(1.3)式为几何凸函数的基本不等式.

下面介绍一些基本初等函数的几何凸性,对于三角函数和反三角函数的几何凸性,将在第三节中证明得到.

例 1　定义在$(0,+\infty)$上的正的常函数和幂函数既是几何凸函数又是几何凹函数.

这个双重性在后面判别一些函数的几何凸性时,起着重要的作用.

例 2　设函数 $f(x)=a^x$ 在$(0,+\infty)$上有定义,其中 a 为常数,求证:当 $0<a<1$ 时,函数 f 为几何凹函数;当 $a>1$ 时,函数 f 为几何凸函数.

证明 当 $0<a<1$ 时,任取 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$,有

$$f(\sqrt{x_1x_2})=a^{\sqrt{x_1x_2}}\geq a^{\frac{x_1+x_2}{2}}=\sqrt{a^{x_1}a^{x_2}}=\sqrt{f(x_1)f(x_2)},$$

所以 $f(x)=a^x$ 是几何凹函数. 同理可证当 $a>1$ 时,$f(x)=a^x$ 是几何凸函数.

例 3 (ⅰ)设常数 $a>1$,则在$(1,+\infty)$上定义的函数 $y=\log_a x$ 为几何凹函数.

(ⅱ)当 $0<a<1$ 时,则在$(0,1)$上定义的函数 $y=\log_a x$ 为几何凹函数.

读者可自行证明.

第二节 一维几何凸函数的基本性质

定理 2.1 设 f_1,f_2 为区间 $I\subseteq R_{++}$ 上的几何凸函数,f_3,f_4 为 $I\subseteq R_{++}$ 上的几何凹函数,则

(ⅰ) $\dfrac{1}{f_1(x)}$为 I 上的几何凹函数,$\dfrac{1}{f_3(x)}$为 I 上的几何凸函数.

(ⅱ) $f_1(x)f_2(x)$为 I 上的几何凸函数,$f_3(x)f_4(x)$为 I 上的几何凹函数.

(ⅲ) $\dfrac{f_1(x)}{f_3(x)}$为 I 上的几何凸函数,$\dfrac{f_3(x)}{f_1(x)}$为 I 上的几何凹函数.

利用定义 1.2 中的(1.1)式,易证定理 2.1,此处从略.

值得指出的是平移可能改变函数的几何凸性,因而就较难刻画几何凸(凹)的几何意义.

例 1 定义在$(1,+\infty)$上的函数 $f(x)=x^2$ 为几何凸函数,而 $g(x)=x^2-1$ 在$(1,+\infty)$不是几何凸函数,$h(x)=(x-1)^2$ 在$(2,+\infty)$也不是几何凸函数.

证明 任取 $x_1,x_2\in(1,+\infty)$,有

$$\begin{aligned}&g(\sqrt{x_1x_2})\leq\sqrt{g(x_1)g(x_2)}\\ \Leftrightarrow&(x_1x_2-1)^2\leq(x_1^2-1)(x_2^2-1)\\ \Leftrightarrow&-2x_1x_2\leq-x_1^2-x_2^2,\end{aligned}$$

上式为错,由此即可看出 g 在$(1,+\infty)$上不是几何凸函数.

同理 h 在$(2,+\infty)$也不是几何凸函数. 其实 g 和 h 分别在它们各自定义的区间内为几何凹函数.

下面的定理 2.2 指出了在图像变换过程中的坐标扩缩中，几何凸(凹)性具有不变性，根据这些性质，以后可以判别和构造一些几何凸(凹)函数.

定理 2.2 设 f_1, f_2 是区间 $I \subseteq R_{++}$ 上的几何凸函数，f_3, f_4 是 $I \subseteq R_{++}$ 上的几何凹函数，$c>0$ 为常数，$H=\{\frac{x}{c} \mid x \in I\}$，则

(ⅰ) $cf_1(x)$ 是 I 上的几何凸函数，$cf_3(x)$ 是 I 上的几何凹函数.

(ⅱ) $f_1(cx)$ 在 H 上是几何凸函数，$f_3(cx)$ 在 H 上是几何凹函数.

(ⅲ) $c+f_1(x)$ 是 I 上的几何凸函数.

(ⅳ) 当 $f_1(x) \leq c$ 时，$c-f_1(x)$ 是 I 上的几何凹函数；当 $f_3(x) \geq c>0$ 时，$f_3(x)-c$ 是 I 上的几何凹函数.

证明 (ⅰ)为显然.

(ⅱ)任取 $x_1, x_2 \in I$，因

$$f_1(c \cdot \sqrt{x_1x_2}) = f_1(\sqrt{(cx_1)(cx_2)}) \leq \sqrt{f_1(cx_1)f_1(cx_2)},$$

故 $f_1(cx)$ 是 H 上的几何凸函数. 同理可证 $f_3(cx)$ 是 H 上的几何凹函数.

(ⅲ) $c+f_1(x)$ 为几何凸函数，等价于

$$c+f_1(\sqrt{x_1x_2}) \leq \sqrt{c+f_1(x_1)}\sqrt{c+f_1(x_2)}$$

$$\Leftarrow c+\sqrt{f_1(x_1)f_1(x_2)} \leq \sqrt{c+f_1(x_1)}\sqrt{c+f_1(x_2)}$$

$$\Leftrightarrow c^2+2c\sqrt{f_1(x_1)f_1(x_2)}+f_1(x_1)f_1(x_2)$$

$$\leq c^2+2c(f_1(x_1)+f_1(x_2))+f_1(x_1)f_1(x_2), \tag{2.1}$$

整理(2.1)式，即知命题成立.

(ⅳ)要证 $c-f_1(x)$ 是几何凹函数，只要证

$$c-f_1(\sqrt{x_1x_2}) \geqslant \sqrt{c-f_1(x_1)}\sqrt{c-f_1(x_2)}$$

$$\Leftarrow c-\sqrt{f_1(x_1)f_1(x_2)} \geq \sqrt{c-f_1(x_1)}\sqrt{c-f_1(x_2)}$$

$$\Leftrightarrow c^2-2c\sqrt{f_1(x_1)f_1(x_2)}+f_1(x_1)f_1(x_2)$$

$$\geq c^2-c(f_1(x_1)+f_1(x_2))+f_1(x_1)f_1(x_2)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{f_1(x_1)f_1(x_2)} \leq f_1(x_1)+f_1(x_2).$$

同理可证 $f_3(x)-c$ 是几何凹函数.

例 2 求证函数 $f(x)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x^{a_i}}$ 为几何凹函数，其中 $x \in (0,+\infty)$，$a_i \in R, i=1,2,\cdots,n$.

证明 根据定理 2.2 的(iii), $1+x^{a_i}$ 在 $(0,+\infty)$ 上为几何凸函数,由定理 2.1 的(i)知 $\frac{1}{1+x^{a_i}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上为几何凹函数,再根据定理 2.1 的(ii), $f(x)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x^{a_i}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上为几何凹函数.

定理 2.3 若 $c>0$ 为常数,区间 $I\subseteq R_{++}$,且 $\min I>c$ 设 $H=\{x-c\mid x\in I\}$.

(i) f 为 I 上的单调递增的几何凸函数,则 $f(x+c)$ 是 H 上的几何凸函数.

(ii) f 为 I 上的单调递减的几何凹函数,则 $f(x+c)$ 是 H 上的几何凹函数.

证明 只需证(i),任取 $x_1,x_2\in H$,由题意知 $x_1,x_2>0$,又有

$$\sqrt{x_1x_2}+c\le\sqrt{(x_1+c)(x_2+c)},$$

$$f(\sqrt{x_1x_2}+c)\le f(\sqrt{(x_1+c)(x_2+c)})\le\sqrt{f(x_1+c)(x_2+c)},$$

所以 $f(x+c)$ 是 H 上的几何凸函数.

定理 2.4 若 $c>0$ 为常数,区间 $I\subseteq R_{++}$,设 $H=\{x+c\mid x\in I\}$,

(i) f 为 I 上的单调递减的几何凸函数,则 $f(x-c)$ 是 H 上的几何凸函数.

(ii) f 为 I 上的单调递增的几何凹函数,则 $f(x-c)$ 是 H 上的几何凹函数.

证明 只证(i),任取 $x_1,x_2\in H$,由题意知 $x_1,x_2>c$,又有

$$\sqrt{x_1x_2}-c\ge\sqrt{x_1-c}\sqrt{x_2-c},$$

$$f(\sqrt{x_1x_2}-c)\le f(\sqrt{(x_1-c)(x_2-c)})\le\sqrt{f(x_1-c)f(x_2-c)},$$

所以 $f(x-c)$ 在 H 上为几何凸函数.

定理 2.5 若 $c>0$ 为常数,区间 $I\subseteq(0,c)$, $H=\{c-x\mid x\in I\}$.

(i) f 为 I 上的单调递减的几何凸函数,则 $f(c-x)$ 是 H 上的几何凸函数.

(ii) f 为 I 上的单调递增的几何凹函数,则 $f(c-x)$ 是 H 上的几何凹函数.

读者可自行证明,此略.

例 3 判别以下函数的几何凸凹性.

(i) $f(x)=\frac{1}{(4-x)^3}$, $x\in(0,1)$,

(ⅱ) $f(x)=\sqrt{4-x}, x\in(0,1)$,

解 (ⅰ)因为 $g(x)=\frac{1}{x^3}, x\in(3,4)$时是几何凸函数,根据定理2.5中(ⅰ)的结论,$f(x)=\frac{1}{(4-x)^3}, x\in(0,1)$是几何凸函数.

(ⅱ)因为 $g(x)=\sqrt{x}, x\in(3,4)$时是几何凹函数,根据定理2.5中(ⅱ)的结论,$f(x)=\sqrt{4-x}, x\in(0,1)$是几何凹函数.

可以把定理2.2的(ⅲ)和(ⅳ)分别加强为以下很实用的定理.

定理2.6 (ⅰ)若 f,g 是区间 $I\subseteq R_{++}$ 上的几何凸函数,则 $f+g$ 是 I 上的几何凸函数.

(ⅱ)若 f 是 $I\subseteq R_{++}$ 上几何凹函数,g 是 $I\subseteq R_{++}$ 上几何凸函数,且 $f(x)>g(x)$成立,则 $f(x)-g(x)$是 I 上的几何凹函数.

证明 (ⅰ)任取 $x_1,x_2\in I$,有

$$f(\sqrt{x_1x_2})+g(\sqrt{x_1x_2})\leq\sqrt{f(x_1)f(x_2)}+\sqrt{g(x_1)g(x_2)}$$
$$\leq\sqrt{f(x_1)+g(x_1)}\cdot\sqrt{f(x_2)+g(x_2)},$$

其中最后一个不等式是由柯西不等式推得.

(ⅱ)证明较简单,在此从略.

必须注意的是两个几何凹函数之和不一定为几何凹函数,后面第三节的例4将用实例说明.

推论2.1 若 $f_1,f_2,\cdots f_n$ 是区间 $I\subseteq R_{++}$ 上的几何凸函数,$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为正常数,则 $\sum_{i=1}^{n}a_if_i$ 是 I 上几何凸函数.

例4 判别函数 $f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4-x^{a_i}}$的几何凸性,其中 $x\in(0,1), a_i\in R_+$, $i=1,2,\cdots,n$.

解 (ⅰ)根据定理2.2的(ⅳ),知 $4-x^{a_i}$ 在(0,1)上为几何凹函数,$\frac{1}{4-x^{a_i}}$在(0,1)上为几何凸函数,再根据推论2.1,$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4-x^{a_i}}$在(0,1)上是几何凸函数.

关于复合函数的几何凸凹性,有以下结果.

定理2.7 f_1 是区间 $I\subseteq R_{++}$ 上的几何凸函数,f_2 是 $I\subseteq R_{++}$ 上的几何凹函数,$f_3:(a,b)\subseteq(0,+\infty)\to(0,+\infty)$上的函数.$f_3(f_1(x))$和 $f_3(f_2(x))$都有意义.

(ⅰ)若 f_3 为单调递增的几何凸函数,则 $f_3(f_1(x))$是 I 上的几何凸函数.

(ⅱ)若 f_3 为单调递减的几何凹函数,则 $f_3(f_1(x))$是 I 上的几何凹函数.

(ⅲ)若 $f_3(x)$为单调递增的几何凹函数,则 $f_3(f_2(x))$是 I 上的几何凹函数.

(ⅳ)若 $f_3(x)$为单调递减的几何凸函数,则 $f_3(f_2(x))$是 I 上的几何凸函数.

证明 仅证(ⅱ),其余略.任取 $x_1,x_2\in I$,有

$$f_1(\sqrt{x_1x_2})\leq\sqrt{f_1(x_1)f_1(x_2)},$$

又因 f_3 为单调递减的几何凹函数,所以有

$$f_3(f_1(\sqrt{x_1x_2}))\geq f_3(\sqrt{f_1(x_1)f_1(x_2)})\geq\sqrt{f_3(f_1(x_1))f_3(f_1(x_2))},$$

故 $f_3(f_1(x))$是几何凹函数.

例 5 判断 $y=\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}},x\in(0,+\infty)$的几何凸性.

解 因 $1+x^2$ 是$(0,+\infty)$上的几何凸的,由定理 2.7 的(ⅰ)知$\sqrt{1+x^2}$是$(0,+\infty)$上的几何凸函数,再由定理 2.1 的(ⅲ),知 $y=\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$是$(0,+\infty)$上的几何凹函数.

推论 2.2 (ⅰ)若 f 是 I 上几何凸函数,$c>0$ 为常数,则 f^c 是 I 上几何凸函数.

(ⅱ)若 f 是 I 上几何凹函数,$c>0$ 为常数,则 f^c 是 I 上几何凹函数.

证明 由于函数 $y=t^c$ 在$(0,+\infty)$为单调递增的几何凸函数,同时又为几何凹函数,根据定理 2.7 的(ⅰ)和(ⅲ)可知推论成立.

关于反函数的几何凸性,有以下结果.

定理 2.8 (ⅰ)若 f 是单调递增的几何凸(凹)函数,则 f^{-1} 是几何凹(凸)函数.

(ⅱ)若 f 是单调递减的几何凸(凹)函数,则 f^{-1}为几何凸(凹)函数.

证明 (ⅰ)这里仅证 f 是几何凸函数的情形,此时 f^{-1}也是单调递增,在定义 1 中,取 $y_1=f(x_1),y_2=f(x_2)$,则有 $x_1=f^{-1}(y_1),x_2=f^{-1}(y_2)$,

$$f(\sqrt{x_1x_2})\leq\sqrt{f(x_1)f(x_2)},$$

$$f(\sqrt{f^{-1}(y_1)f^{-1}(y_2)})\le\sqrt{y_1y_2},$$
$$\sqrt{f^{-1}(y_1)f^{-1}(y_2)}\le f^{-1}(\sqrt{y_1y_2}),$$

由定义 1 知 f^{-1}是几何凹函数.

(ⅱ)类似可证,在此从略.

第三节　几何凸函数的一个判别法则

如果仅从定义判别函数的几何凸凹性,那么对于许多函数来说,是很复杂的,甚至在许多情况下是难以做到的.正如判别函数的凸凹性,经常不是从定义出发的,而更多的是利用其二阶导数来判断.这里将给出类似的几何凸凹性的判别法则,其中定理 3.1 的证明是[17]得到的,不过没有写成定理罢了,在[5]中的第 169 页的 ***Chrystal*** 不等式证明中,有相类似的变换.

定理 3.1　(ⅰ)若 $g:(c,d)\to(-\infty,+\infty)$是连续的凸函数,则 $f(x)=e^{g(\ln x)}$是(e^c,e^d)上的几何凸函数.

(ⅱ)反之若 $f:(a,b)\to(0,+\infty)$是几何凸函数,则 $g(x)=\ln f(e^x)$是$(\ln a,\ln b)$上的连续的凸函数.

证明　(ⅰ)若 $g(x):(c,d)\to(-\infty,+\infty)$是连续的凸函数,任取 $x_1,x_2\in(e^c,e^d)$,有

$$f(\sqrt{x_1x_2})=e^{g[\ln(\sqrt{x_1x_2})]}=e^{g(\frac{\ln x_1+\ln x_2}{2})}\le e^{\frac{g(\ln x_1)+g(\ln x_2)}{2}}$$
$$=\sqrt{e^{g(\ln x_1)}e^{g(\ln x_2)}}=\sqrt{f(x_1)f(x_2)}.$$

所以 $f(x)$是(e^c,e^d)上的几何凸函数.

(ⅱ)反之 $f(x):(a,b)\to(0,+\infty)$是几何凸函数,任取 $x_1,x_2\in(\ln a,\ln b)$,有

$$g(\frac{x_1+x_2}{2})=\ln f(e^{\frac{x_1+x_2}{2}})=\ln f(\sqrt{e^{x_1}e^{x_2}})$$
$$\le\ln\sqrt{f(e^{x_1})f(e^{x_2})}$$
$$=\frac{\ln f(e^{x_1})+\ln f(e^{x_2})}{2}=\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2},$$

因 f 连续,故 g 也连续,所以 $g(x)$是$(\ln a,\ln b)$上的连续的凸函数.

同样对于几何凹函数,相应有以下成立.

定理 3.2　若 $g:(c,d)\to(-\infty,+\infty)$是连续的凹函数,则 $f(x)=e^{g(\ln x)}$

是(e^c,e^d)上的几何凹函数；反之若 $f:(a,b)\to(0,+\infty)$为几何凹函数，则 $g(x)=\ln f(e^x)$是$(\ln a,\ln b)$上的连续的凹函数.

不难发觉上面两个定理中的 f 和g 之间的性质是等价的，众所周知，判别一个函数为凸函数方法很多，这样我们可以通过以上定理，得到同样多的几何凸函数的判别方法.下面定理 3.3 同时由文[14]、[19]和[47]得到，文[19]研究了广义凸凹函数的定义和判别，这是其中一类.

定理 3.3 设$(a,b)\subset(0,+\infty)$，$f:(a,b)\to(0,+\infty)$，f 二阶可导.

(ⅰ)若 $x[f(x)f''(x)-(f'(x))^2]+f(x)f'(x)\geq0$，则 f 是几何凸函数，反之亦然.

(ⅱ)若 $x[f(x)f''(x)-(f'(x))^2]+f(x)f'(x)\leq0$，有 f 则为几何凹函数，反之亦然.

证明 (ⅰ)先证定理的第一部分，设 $g(x)=\ln f(e^x):(\ln a,\ln b)\to(-\infty,+\infty)$，则

$$g'(x)=[\ln f(e^x)]'=\frac{f'(e^x)}{f(e^x)}e^x,$$

$$g''(x)=[\frac{f'(e^x)}{f(e^x)}e^x]'=e^x\frac{f''(e^x)f(e^x)e^x-[f'(e^x)]^2e^x}{f^2(e^x)}+e^x\frac{f'(e^x)}{f(e^x)},$$

$$g''(x)=\frac{e^x}{f^2(e^x)}\{e^x[f''(e^x)f(e^x)-(f'(e^x))^2]+f(e^x)f'(e^x)\},$$

从条件知 $g''(x)\geqslant0$，故 $g(x)$是连续的凸函数，根据定理 3.1 知，$f(x)$是几何凸函数；反之，$f(x)$是几何凸函数，$g(x)=\ln f(e^x):(\ln a,\ln b)\to(-\infty,+\infty)$是连续的凸函数，则易知 $g(x)$二阶可导，由 $g''(x)\geq0$ 即可证得欲证结论.

(ⅱ)定理的第二部分同样可证，在此略.

定理 3.4[14] 设区间 $I\subseteq R$，$f:I\to R_{++}$，在区间 I 上为几何凸函数的充分必要条件是：对于 I 中任意的 $x_1<x_2<x_3$，有

$$\begin{vmatrix}\ln x_1 & \ln f(x_1) & 1\\ \ln x_2 & \ln f(x_2) & 1\\ \ln x_3 & \ln f(x_3) & 1\end{vmatrix}\geq0. \tag{3.1}$$

证明 必要性：若 f 在I 上是几何凸函数，则由定理 3.1，$g(x)=\ln f(e^x)$为 $\ln I=\{\ln x\mid x\in I\}$上的凸函数，对于 I 中任意的 $x_1<x_2<x_3$，有 $\ln x_1<\ln x_2<\ln x_3$ 由第一章的定理 2.7 有

$$\begin{vmatrix}\ln x_1 & \ln f(e^{\ln x_1}) & 1\\ \ln x_2 & \ln f(e^{\ln x_2}) & 1\\ \ln x_3 & \ln f(e^{\ln x_3}) & 1\end{vmatrix}\geq0,$$

即

$$\begin{vmatrix} \ln x_1 & \ln f(x_1) & 1 \\ \ln x_2 & \ln f(x_2) & 1 \\ \ln x_3 & \ln f(x_3) & 1 \end{vmatrix} \geq 0.$$

充分性:若对于 I 中任意的 $x_1 < x_2 < x_3$,有

$$\begin{vmatrix} \ln x_1 & \ln f(x_1) & 1 \\ \ln x_2 & \ln f(x_2) & 1 \\ \ln x_3 & \ln f(x_3) & 1 \end{vmatrix} \geq 0,$$

即

$$\begin{vmatrix} \ln x_1 & \ln f(e^{\ln x_1}) & 1 \\ \ln x_2 & \ln f(e^{\ln x_2}) & 1 \\ \ln x_3 & \ln f(e^{\ln x_3}) & 1 \end{vmatrix} \geq 0,$$

据第一章的定理 2.7,$g(x)=\ln f(e^x)$是 $\ln I=\{\ln x \mid x\in I\}$上的凸函数,由定理 3.1 知 f 是 I 上的几何凸函数.

定理 3.5 若几何凸函数 f 在$[a,b]\subseteq R_{++}$上有定义,则

(ⅰ)f 在(a,b)上有单侧导数.

(ⅱ)对于任意 $x\in(a,b)$,有 $f'_-(x)\leq f'_+(x)$.

证明 由定理 3.1 知 $g(x)=\ln f(e^x)$是$[\ln a,\ln b]$上的连续凸函数,由第一章的定理 2.8 知 $g(x)=\ln f(e^x)$在$(\ln a,\ln b)$上有左右导数且 $g'_-(x)\leq g'_+(x)$,于是

$$\lim_{t\to x-0}\frac{g(t)-g(x)}{t-x}\leq \lim_{t\to x+0}\frac{g(t)-g(x)}{t-x},$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t\to x-0}\frac{\ln f(e^t)-\ln f(e^x)}{t-x}\leq \lim_{t\to x+0}\frac{\ln f(e^t)-\ln f(e^x)}{t-x},$$

上式中 e^t 用 t 代替,e^x 用 x 代替,则 $t,x\in(a,b)$,且有

$$\lim_{\ln t\to \ln x-0}\frac{\ln f(t)-\ln f(x)}{\ln t-\ln x}\leq \lim_{\ln t\to \ln x+0}\frac{\ln f(t)-\ln f(x)}{\ln t-\ln x}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t\to x-0}\frac{t-x}{\ln t-\ln x}\cdot\frac{\ln\dfrac{f(t)}{f(x)}}{t-x}\leq \lim_{t\to x+0}\frac{t-x}{\ln t-\ln x}\cdot\frac{\ln\dfrac{f(t)}{f(x)}}{t-x}$$

$$\Leftrightarrow x\lim_{t\to x-0}\ln\left(1+\frac{f(t)-f(x)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{t-x}}\leq x\lim_{t\to x+0}\ln\left(1+\frac{f(t)-f(x)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{t-x}}$$

$$\Leftrightarrow x\lim_{t\to x-0}\ln\left[\left(1+\frac{f(t)-f(x)}{f(x)}\right)^{\frac{f(x)}{f(t)-f(x)}}\right]^{\frac{f(t)-f(x)}{(t-x)f(x)}}$$

$$\leq x \lim_{t\to x+0} \ln\left[\left(1+\frac{f(t)-f(x)}{f(x)}\right)^{\frac{f(x)}{f(t)-f(x)}}\right]^{\frac{f(t)-f(x)}{(t-x)f(x)}}$$

$$\Leftrightarrow x \lim_{t\to x-0} e^{\frac{f(t)-f(x)}{(t-x)f(x)}} \leq x \lim_{t\to x+0} e^{\frac{f(t)-f(x)}{(t-x)f(x)}},$$

因上式左右式的极限都存在,则易知 $\lim_{t\to x-0}\dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}$ 和 $\lim_{t\to x+0}\dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}$ 都存在,且有

$$xe^{\frac{f'_-(x)}{f(x)}} \leq xe^{\frac{f'_+(x)}{f(x)}},$$

$$f'_-(x) \leq f'_+(x).$$

定理 3.3 解决了几何凸凹函数运用过程中的瓶塞现象,为大量判别函数的几何凸性提供了有力的工具.前面提到过几何凸函数的几何意义较难刻画,但经济意义倒有一个.

定理 3.6[47] 设 $(a,b)\subset(0,+\infty)$, $f:(a,b)\to(0,+\infty)$, f 为二阶可导,则 f 为几何凸(凹)函数的充分必要条件为 $y=f(x)$ 的弹性函数为单调增加(减少)的.

证明 仅证 f 为几何凸函数的情形,f 的弹性函数为 $y=\dfrac{xf'(x)}{f(x)}$,所以有:

$$\left(\frac{xf'(x)}{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{f(x)} + x\frac{f''(x)f(x)-(f'(x))^2}{f^2(x)},$$

$$\left(\frac{xf'(x)}{f(x)}\right)' = \frac{f(x)f'(x)+x[f''(x)f(x)-(f'(x))^2]}{f^2(x)},$$

再由定理 3.3 即知定理 3.6 成立.

利用定理 3.3 可以解决许多函数的几何凸性的判断.

推论 3.1 (ⅰ) 设 $0<x<\pi$,则 $y=\sin x$ 是几何凹函数.

(ⅱ)设 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, $y=\cos x$ 是几何凹函数.

(ⅲ)设 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, $y=\tan x$ 是几何凸函数.

(ⅳ)设 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, $y=\cot x$ 是几何凹函数.

(ⅴ)设 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, $y=\sec x$ 是几何凸函数.

(ⅵ)设 $0<x<\pi$,则 $y=\csc x$ 是几何凸函数.

证明 (ⅰ)当 $0<x<\pi$,易有 $\sin x\leq x$,对于 $y=\sin x$,有

$$x[yy''-(y')^2]+yy' = -x+\sin x\cos x$$
$$= -x+\frac{1}{2}\sin 2x \leq -x+\frac{1}{2}2x = 0,$$

所以 $y=\sin x$ 是几何凹函数.

对于 $y=\cos x$ 和 $y=\tan x$ 的几何凸凹性,证明从略.

(ii)由于在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上,有 $x\leq\tan x$,对于 $y=\cot x$,

$$x[yy''-(y')^2]+yy' = x\csc^2 x(\cot x^2-1)-\cot x\csc^2 x$$
$$=\frac{\csc^2 x}{\tan^2 x}[x-x\tan^2 x-\tan x]\leq 0,$$

(iii)对于 $y=\sec x$ 和 $y=\csc x$ 的几何凸性,由定理2.1的(i)及 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 几何凸性推得.

其中的(iii)、(v)和(vi)是文[14]得到的,文[14]还得到了下推论3.2的(i).

推论 3.2 (i)设 $0<x\leq 1$,则 $y=\arcsin x$ 是几何凸函数.

(ii)设 $0<x<1$,则 $y=\arccos x$ 是几何凹函数.

(iii)设 $0<x<+\infty$,则 $y=\arctan x$ 是几何凹函数.

(iv)设 $0<x<+\infty$,则 $y=\operatorname{arccot} x$ 是几何凹函数.

证明 (i)在 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 上,$y=\sin x$ 为单调递增的几何凹函数,根据定理2.8推得 $y=\arcsin x$ 是几何凸函数.

其余类似可证,在此从略.

例 1 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n>0$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$,

(i)若 $A,B,C\in(0,\pi)$ 和 $A_1,A_2,\cdots,A_n\in(0,\pi)(n\geq 2)$,则

$$\sin\sqrt{AB}\geq\sqrt{\sin A\sin B}.$$
$$\sin\sqrt[3]{ABC}\geq\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C} \tag{3.2}$$
$$\sin(A_1^{\lambda_1}A_2^{\lambda_2}\cdots A_n^{\lambda_n})\geq\sin^{\lambda_1}A_1\sin^{\lambda_2}A_2\cdots\sin^{\lambda_n}A_n.$$

(ii)若 A,B 和 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n\geq 2)$ 为锐角,则

$$\cos\sqrt{AB}\geq\sqrt{\cos A\cos B}.$$
$$\cos(A_1^{\lambda_1}A_2^{\lambda_2}\cdots A_n^{\lambda_n})\geq\cos^{\lambda_1}A_1\cos^{\lambda_2}A_2\cdots\cos^{\lambda_n}A_n.$$
$$\tan\sqrt{AB}\leq\sqrt{\tan A\tan B}.$$
$$\tan(A_1^{\lambda_1}A_2^{\lambda_2}\cdots A_n^{\lambda_n})\leq\tan^{\lambda_1}A_1\tan^{\lambda_2}A_2\cdots\tan^{\lambda_n}A_n.$$

$$\cot\sqrt{AB} \geq \sqrt{\cot A\cos B}.$$

$$\cot(A_1^{\lambda_1}A_2^{\lambda_2}\cdots A_n^{\lambda_n}) \geq \cot^{\lambda_1}A_1\cot^{\lambda_2}A_2\cdots\cot^{\lambda_n}A_n.$$

这些都可由推论 3.1 直接推出.又因为

$$\sin\frac{\pi}{3} = \sin\frac{A+B+C}{3} \geq \sin\sqrt[3]{ABC} \geq \sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C},$$

所以(3.2)式加强了 ΔABC 中的著名不等式:

$$\sin A\sin B\sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

例 2 求证:函数 $y=x^x$ 在 $(0,e^{-2})$ 上为几何凹函数,在 $(e^{-2},+\infty)$ 上为几何凸函数.

证明 $$\ln y = x\ln x,$$

两边求导,有

$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1,$$

于是

$$\frac{xy'}{y} = x(\ln x+1),$$

$$\left(\frac{xy'}{y}\right)' = \ln x + 2,$$

所以在 $(0,e^{-2})$ 上,$\left(\frac{xy'}{y}\right)'=\ln x+2$ 为负,由定理 3.3 知 y 在 $(0,e^{-2})$ 上为几何凹函数;在 $(e^{-2},+\infty)$ 上,$\left(\frac{xy'}{y}\right)'=\ln x+2$ 为正,所以 y 在 $(e^{-2},+\infty)$ 上是几何凸函数.

不难验证函数 $y=x^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是凸函数,而它在 $(0,e^{-2})$ 上却是几何凹函数.

例 3 求证:函数 $y=\ln(\ln x+1)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是几何凹函数.

证明 因

$$y' = \frac{1}{x(\ln x+1)},$$

$$\frac{xy'}{y} = \frac{1}{(\ln x+1)}\cdot\frac{1}{\ln(\ln x+1)},$$

$$\left(\frac{xy'}{y}\right)' = -\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x+1)^2}\cdot\frac{1}{\ln(\ln x+1)}$$

$$-\frac{1}{(\ln x+1)^2}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{[\ln(\ln x+1)]^2},$$

而

$$-\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x+1)^2}\cdot\frac{1}{\ln(\ln x+1)}-\frac{1}{(\ln x+1)^2}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{[\ln(\ln x+1)]^2}<0$$
$$\Leftrightarrow \ln(\ln x+1)+1>0$$
$$\Leftrightarrow \ln x>e^{-1}-1=\frac{1-e}{e}$$
$$\Leftrightarrow x>e^{\frac{1}{e}-1},$$

因 $x>1>e^{\frac{1}{e}-1}$，所以函数 $y=\ln(\ln x+1)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是几何凹函数.

注：上例中要求 $x>1$，只是为了使函数值为正，同样的道理，下面例 4 中的 $\frac{3}{4}\pi$ 也起着同样的作用.

例 4　设 θ 为方程 $x=\cos x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内的解，求证：函数 $y=\sin x+\cos x$ 在 $(0,\frac{\theta}{2})$ 上是几何凸函数，在 $(\frac{\theta}{2},\frac{3\pi}{4})$ 上是几何凹函数.

证明　由于函数 $f(x)=x-\cos x$ 在 $(0,\frac{3\pi}{4})$ 上定义，且函数单调递增，所以 θ 为方程 $x=\cos x$ 在 $(0,\frac{3\pi}{4})$ 内的唯一解. 同时不难验证

$$x[yy''-(y')^2]+yy'=-2x+\cos 2x,$$

由定理 3.3 知命题成立.

注：在 $(0,\frac{\theta}{2})$ 上，$\sin x$ 和 $\cos x$ 都是几何凹函数，其和却为几何凸函数，这与两个几何凸函数之和仍为几何凸函数有很大的区别.

例 5　设 θ 为方程 $x=\cos x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内的解，当 $A,B\in(0,\theta]$，$\alpha>0$，$\beta>0$，$\alpha+\beta=1$ 时，有

$$1+\sin A^{\alpha}B^{\beta}\le(1+\sin A)^{\alpha}(1+\sin B)^{\beta};$$

当 $A,B\in[\theta,\frac{\pi}{2}]$ 时，有

$$1+\sin A^{\alpha}B^{\beta}\ge(1+\sin A)^{\alpha}(1+\sin B)^{\beta}.$$

证明时考虑函数 $y=1+\sin x$ 的几何凸性即可，详细过程在此略.

从以上结果出发，可以得到一大批不等式，正如[18]所说的，几何凸、凹函数是发现新型的不等式强有力的工具.

第四节　对数凸函数与几何凸函数

在以后的章节中，将多次出现对数凸函数这个概念，它的定义在[2]中也有介绍.

定义 4.1　如果函数 f 在 $I\subseteq R$ 上是正的，且函数 $\ln f(x)$ 在 I 上是凸(凹)的，则称 f 在 $I\subseteq R$ 上是对数凸(凹)函数.

定理 4.1　(ⅰ)若称 f 在 $I\subseteq R$ 上是对数凸函数，则任取 $x_1,x_2\in R$，有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\sqrt{f(x_1)f(x_2)}$$

成立.

(ⅱ)若称 f 在 $I\subseteq R$ 上是对数凸函数，则任取 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in R$，有

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\le\sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)}$$

成立.

(ⅲ)若 $f:I\subseteq R\to R_{++}$上二次可导，则 f 在 $I\subseteq R$ 上是对数凸函数的充要条件为

$$f(x)f''(x)\ge(f'(x))^2.$$

上面结论利用凸函数的定义和性质是容易得到的，若 f 为对数凹函数，则上几式中的不等号反向.下面两个定理在[2]中原来用对数凸函数的定义叙述的，不太自然，在这里对其改写.

定理 4.2(三圆定理)　设 f 是复值函数，并且在环域 $a<|z|<b$ 内解析，$M:(a,b)\to R$，由

$$M(r)=\sup_{|z|=r}|f(z)|$$

定义，则 M 在(a,b)上是几何凸函数.

定理 4.3　设 f 是复值函数，并且在环域 $a<|z|<b$ 内解析，$1\le p<+\infty$，$M_p:(a,b)\to R$，由

$$M_p(r)=\left(\int_0^{2\pi}|f(re^{i\phi})|^p d\phi\right)^{\frac{1}{p}}$$

定义，则 $M_p(r)$在(a,b)上是几何凸函数.

定理 4.4[51]　(ⅰ)若 f 在 $I\subseteq R_{++}$ 上是对数凸函数，且 f 为递增的，则 f

也是几何凸函数.

(ii)若 f 在 $I\subseteq R_{++}$ 上是对数凹函数,且 f 为递减的,则 f 也是几何凹函数.

证明　(i)因

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\leq\sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)},$$

所以

$$f(\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n})\leq f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)$$
$$\leq\sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)},$$

故 f 是几何凸函数.

(ii)因

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\geq\sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)},$$

所以

$$f(\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n})\geq f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)$$
$$\geq\sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)},$$

故 f 为几何凹函数.

第五节　基本不等式的一些应用与加强

设函数 f 是定义在区间 $I(\subseteq R_{++})$ 上的几何凸(凹)函数,对于任一 x_1, $x_2,\cdots,x_n\in I$ 和 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n>0$,当 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$ 时,则有

$$f(x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n})\leq(\geq)f^{\lambda_1}(x_1)f^{\lambda_2}(x_2)\cdots f^{\lambda_n}(x_n).\qquad(5.1)$$

我们称上式为几何凸(凹)函数的基本不等式.对其研究可以看出其有广泛的应用,这在此前此后读者都能体会出来,这里再介绍文[50]中的一些结果.

定理 5.1[50]　设 $x_i>0,y_i>0,p_i>0(i=1,2,\cdots,n)$, $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_n}=1$,

(i)若 $\lambda>0,\mu>0$,则

$$\prod_{i=1}^{n}(\lambda x_i^{p_i}+\mu y_i^{p_i})^{\frac{1}{p_i}}\geq\lambda\prod_{i=1}^{n}x_i+\mu\prod_{i=1}^{n}y_i,\tag{5.2}$$

（ⅱ）若 $\lambda>0,\mu<0,\frac{x_i}{y_i}>(-\frac{\mu}{\lambda})^{\frac{1}{p_i}}$，则

$$\prod_{i=1}^{n}(\lambda x_i^{p_i}+\mu y_i^{p_i})^{\frac{1}{p_i}}\geq\lambda\prod_{i=1}^{n}x_i+\mu\prod_{i=1}^{n}y_i.\tag{5.3}$$

证明　（ⅰ）构造函数 $f(t)=\lambda t+\mu$，因为

$$t[f(t)f''(t)-(f'(t))^2]+f(t)f'(t)$$
$$=t(0-\lambda^2)+\lambda(\lambda t+\mu)=\lambda\mu,$$

由定理 3.3 知，当 $\lambda>0,\mu>0$ 时，$f(t)=\lambda t+\mu$ 是 $(0,+\infty)$ 上的几何凸函数，由(5.1)式得

$$\lambda(\prod_{i=1}^{n}t_i^{\frac{1}{p_i}})+\mu\leq\prod_{i=1}^{n}(\lambda t_i+\mu)^{\frac{1}{p_i}},$$

令 $t_i=(\frac{x_i}{y_i})^{p_i}(i=1,2,\cdots,n)$，代入上面不等式，即得不等式(5.2)式.

（ⅱ）当 $\lambda>0,\mu<0$ 时，易知 $f(t)=\lambda t+\mu$ 在 $(-\frac{\mu}{\lambda},+\infty)$ 上为几何凹函数，当 $t_i\in(-\frac{\mu}{\lambda},+\infty),i=1,2,\cdots,n$ 时，有

$$\lambda(\prod_{i=1}^{n}t_i^{\frac{1}{p_i}})+\mu\geq\prod_{i=1}^{n}(\lambda t_i+\mu)^{\frac{1}{p_i}},$$

令 $t_i=(\frac{x_i}{y_i})^{p_i}$ 知(5.3)式成立. 证毕.

在不等式(5.2)中，取 $\lambda=\mu=1$ 便得到这样一个结果：

推论 5.1　设 $x_i>0,y_i>0,p_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_n}=1$，则

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i^{p_i}+y_i^{p_i})^{\frac{1}{p_i}}\geq\prod_{i=1}^{n}x_i+\prod_{i=1}^{n}y_i.$$

定理 5.2[50]　设 $r>0,\lambda_i>0,i=1,2,\cdots,n,\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$，

（ⅰ）若 $0<x_i<(2r+\sqrt{4r^2+1})^{\frac{1}{2r}}$，则

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i^r+x_i^{-r})^{\lambda_i}\geq(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i)^r+(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i)^{-r}.\tag{5.4}$$

（ⅱ）若 $x_i>(2r+\sqrt{4r^2+1})^{\frac{1}{2r}}$，则

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i^r+x_i^{-r})^{\lambda_i}\leq(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i)^r+(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i)^{-r}. \tag{5.5}$$

证明 构造函数 $f(t)=(\ln t)^r+(\ln t)^{-r}$,因为

$$t[f(t)f''(t)-(f'(t))^2]+f(t)f'(t)$$
$$=(\ln t)^{-2r-2}\frac{r}{t}[4r^2+1-((\ln t)^{2r}-2r)^2],$$

当 $r>0,0<\ln t<(2r+\sqrt{4r^2+1})^{\frac{1}{2r}}$时,

$$(\ln t)^{-2r-2}\frac{r}{t}[4r^2+1-((\ln t)^{2r}-2r)^2]>0;$$

当 $r>0,\ln t>(2r+\sqrt{4r^2+1})^{\frac{1}{2r}}$时,

$$(\ln t)^{-2r-2}\frac{r}{t}[4r^2+1-((\ln t)^{2r}-2r)^2]<0;$$

由定理 3.3 知,$f(t)=(\ln t)^r+(\ln t)^{-r}$在区间$(1,e^{(2r+\sqrt{4r^2+1})^{\frac{1}{2r}}})$上是几何凸函数,在$(e^{(2r+\sqrt{4r^2+1})^{\frac{1}{2r}}},+\infty)$上是几何凹函数;由(5.1)式知:

当 $1<t_i<e^{(2r+\sqrt{4r^2+1})^{\frac{1}{2r}}}$ 时,有

$$\prod_{i=1}^{n}((\ln t_i)^r+(\ln t_i)^{-r})^{\lambda_i}\geq(\ln(t_1^{\lambda_1}t_2^{\lambda_2}\cdots t_n^{\lambda_n}))^r+(\ln(t_1^{\lambda_1}t_2^{\lambda_2}\cdots t_n^{\lambda_n}))^{-r}.$$

当 $t_i>e^{(2r+\sqrt{4r^2+1})^{\frac{1}{2r}}}$ 时,有

$$\prod_{i=1}^{n}((\ln t_i)^r+(\ln t_i)^{-r})^{\lambda_i}\leq(\ln(t_1^{\lambda_1}t_2^{\lambda_2}\cdots t_n^{\lambda_n}))^r+(\ln(t_1^{\lambda_1}t_2^{\lambda_2}\cdots t_n^{\lambda_n}))^{-r}.$$

在上面不等式中,令 $\ln t_i=x_i(i=1,2,\cdots,n)$,即得不等式(5.4)、(5.5).证毕.

注意到,当 $r>0,x_i>0,\sum_{i=1}^{n}x_i=1$ 时,有

$$0<x_i<1<(2r+\sqrt{4r^2+1})^{\frac{1}{2r}},$$

在定理 5.2 中的不等式(5.4)中,令 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots\lambda_n=\frac{1}{n}$,即得下述不等式

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i^r+\frac{1}{x_i^r})\geq(n^r+\frac{1}{n^r})^n.$$

文[51]建立了如下关于正数 x 不等式:

$$\sin^2\frac{x\pi}{1+x+x^2}\geq\sin\frac{x^2\pi}{1+x+x^2}\sin\frac{\pi}{1+x+x^2}, \tag{5.6}$$

$$\tan^2 \frac{x\pi}{2(1+x+x^2)} \le \tan \frac{x^2\pi}{2(1+x+x^2)} \tan \frac{\pi}{2(1+x+x^2)}. \quad (5.7)$$

下面给出上述不等式的推广,并补充一个类似不等式.

定理 5.3[54] 设 $x \in R_{++}, n \in N$,则

$$\sin^{2n} \frac{x^n\pi}{1+x+\cdots+x^{2n}} \ge \prod_{\substack{k=0\\k\ne n}}^{2n} \sin \frac{x^k\pi}{1+x+\cdots+x^{2n}}, \quad (5.8)$$

$$\cos^{2n} \frac{x^n\pi}{2(1+x+\cdots+x^{2n})} \ge \prod_{\substack{k=0\\k\ne n}}^{2n} \cos \frac{x^k\pi}{2(1+x+\cdots+x^{2n})}, \quad (5.9)$$

$$\tan^{2n} \frac{x^n\pi}{2(1+x+\cdots+x^{2n})} \le \prod_{\substack{k=0\\k\ne n}}^{2n} \tan \frac{x^k\pi}{2(1+x+\cdots+x^{2n})}. \quad (5.10)$$

证明 由推论 3.1 知:$f(x)=\sin x$ 是 $(0,\pi)$ 上的几何凹函数,$f(x)=\cos x$ 是 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上的几何凹函数,$f(x)=\tan x$ 是 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上的几何凸函数.

因为 $0<\frac{x^k\pi}{1+x+\cdots+x^{2n}}<\pi(k=0,1,2,\cdots,2n)$,在(5.1)式令 $\lambda_i=\frac{1}{2n}$,其中 $i=1,2,\cdots,2n$,则有

$$\sqrt[2n]{\prod_{\substack{k=0\\k\ne n}}^{2n} \sin \frac{x^k\pi}{1+x+\cdots+x^{2n}}} \le \sin\left(\sqrt[2n]{\prod_{\substack{k=0\\k\ne n}}^{2n} \frac{x^k}{1+x+\cdots+x^{2n}}}\right),$$

$$\prod_{\substack{k=0\\k\ne n}}^{2n} \sin \frac{x^k\pi}{1+x+\cdots+x^{2n}} \le \left[\sin\left(\sqrt[2n]{\prod_{\substack{k=0\\k\ne n}}^{2n} \frac{x^k}{1+x+\cdots+x^{2n}}}\right)\right]^{2n},$$

将上面不等式整理即得(5.8)式,用同样的方法可证明不等式(5.9)、(5.10).

在定理 5.3 中,令 $n=1$ 便得到不等式(5.6)、(5.7).

下面介绍几何凸函数的基本不等式的加强与推广.

定理 5.4[54] 设 $f(x)$是定义在区间 $I\subseteq R_{++}$上的正值函数,$x_i\in I,\lambda_i\in R_{++}(i=1,2,\cdots,n),\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$,则

$$\exp\left(\frac{\alpha}{2}\sum_{1\le i<j\le n}\lambda_i\lambda_j(\ln x_i-\ln x_j)^2\right) \le \frac{(f(x_1))^{\lambda_1}(f(x_2))^{\lambda_2}\cdots(f(x_n))^{\lambda_n}}{f(x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n})}$$

$$\le \exp\left(\frac{\beta}{2}\sum_{1\le i<j\le n}\lambda_i\lambda_j(\ln x_i-\ln x_j)^2\right), \quad (5.11)$$

其中

$$\alpha = \inf_{x\in I}\frac{x^2(f(x)f''(x)-(f'(x))^2)+xf(x)f'(x)}{f^2(x)},$$

$$\beta = \sup_{x\in I}\frac{x^2(f(x)f''(x)-(f'(x))^2)+xf(x)f'(x)}{f^2(x)}.$$

证明 设 $I=(a,b)\subseteq(0,+\infty)$(其它类型的区间,证明方法相同).

构造函数 $\varphi(t)=\ln(f(e^t))-\frac{1}{2}\mu t^2, t\in(\ln a,\ln b)$. 对 t 求导,得

$$\varphi'(t)=\frac{f'(e^t)e^t}{f(e^t)}-\mu t,$$

$$\varphi''(t)=\frac{e^{2t}(f(e^t)f''(e^t)-(f'(e^t))^2)+e^tf(e^t)f'(e^t)}{f^2(e^t)}-\mu,$$

若取

$$\mu=\alpha=\inf_{t\in(\ln a,\ln b)}\frac{e^{2t}(f(e^t)f''(e^t)-(f'(e^t))^2)+e^tf(e^t)f'(e^t)}{f^2(e^t)}$$

$$=\inf_{x\in(a,b)}\frac{x^2(f(x)f''(x)-(f'(x))^2)+xf(x)f'(x)}{f^2(x)},$$

则 $\varphi''(t)\geq 0$,从而 $\varphi(t)=\ln(f(e^t))-\frac{1}{2}\alpha t^2$ 为区间 $(\ln a,\ln b)$ 上的凸函数;由第一章的(2.6)式知:对任意 $t_i\in(\ln a,\ln b),\lambda_i\in R_{++}(i=1,2,\cdots,n)$, $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$ 时,有

$$\ln(f(e^{\lambda_1t_1+\lambda_2t_2+\cdots+\lambda_nt_n}))-\frac{\alpha}{2}(\lambda_1t_1+\lambda_2t_2+\cdots+\lambda_nt_n)^2$$

$$\leq \lambda_1(\ln(f(e^{t_1}))-\frac{1}{2}\alpha t_1^2)+\lambda_2(\ln(f(e^{t_2}))-\frac{1}{2}\alpha t_2^2)+\cdots$$

$$+\lambda_n(\ln(f(e^{t_n}))-\frac{1}{2}\alpha t_n^2),$$

在上面不等式中,令 $t_i=\ln x_i, x_i\in(a,b)$,得

$$\ln(f(x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n}))-\frac{\alpha}{2}(\lambda_1\ln x_1+\lambda_2\ln x_2+\cdots+\lambda_n\ln x_n)^2$$

$$\leq \lambda_1\ln(f(x_1))+\lambda_2\ln(f(x_2))+\cdots+\lambda_n\ln(f(x_n))$$

$$-\frac{1}{2}\alpha\lambda_1(\ln x_1)^2-\frac{1}{2}\alpha\lambda_2(\ln x_2)^2-\cdots-\frac{1}{2}\alpha\lambda_n(\ln x_n)^2$$

$$\Leftrightarrow \ln\frac{(f(x_1))^{\lambda_1}(f(x_2))^{\lambda_2}\cdots(f(x_n))^{\lambda_n}}{f(x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n})}$$

$$\geq \frac{\alpha}{2}(\sum_{i=1}^n\lambda_i(\ln x_i)^2-(\sum_{i=1}^n\lambda_i\ln x_i)^2).$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{(f(x_1))^{\lambda_1}(f(x_2))^{\lambda_2}\cdots(f(x_n))^{\lambda_n}}{f(x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n})}$$

$$\geq \frac{\alpha}{2}\Big((\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\ln x_i)^2)-(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\ln x_i)^2\Big)$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{(f(x_1))^{\lambda_1}(f(x_2))^{\lambda_2}\cdots(f(x_n))^{\lambda_n}}{f(x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n})}$$

$$\geq \frac{\alpha}{2}\sum_{1\leq i<j\leq n}\lambda_i\lambda_j(\ln x_i-\ln x_j)^2,$$

将上面不等式整理即得式(5.11)左端不等式.

用同样的方法可证明式(5.11)右端不等式,定理 5.4 得证.

特别地,若 $f(x)$是区间 I 上的几何凸(凹)函数,则由定理 3.3 知 $\alpha\geq 0$ $(\beta\leq 0)$,运用定理 5.4 即得基本不等式(5.1)式,故定理 5.4 是几何凸函数的基本不等式的加强与推广.

在定理 5.4 中取 $f(x)=e^x$,便得到加权平均值不等式的加强及逆向形式.

定理 5.5[50] 设 $0<p\leq x_i\leq q,\lambda_i\in R_{++}(i=1,2,\cdots,n),\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$,则

$$\frac{p}{2}\sum_{1\leq i<j\leq n}\lambda_i\lambda_j(\ln x_i-\ln x_j)^2\leq(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i)-\prod_{i=1}^{n}x_i^{\lambda_i}$$

$$\leq \frac{q}{2}\sum_{1\leq i<j\leq n}\lambda_i\lambda_j(\ln x_i-\ln x_j)^2.$$

练 习

1. 求证:函数 $y=\dfrac{\arcsin x}{x}$在(0,1)上是几何凸函数.

2. 设 θ 为方程 $1-x\tan x=0$ 在$(0,\frac{\pi}{2})$内的解,$a>1$ 为常数,求证:当 $A,B\in[\theta,\frac{\pi}{2}]$时,有

$$a+\sin A^{\alpha}B^{\beta}\geq(a+\sin A)^{\alpha}(a+\sin B)^{\beta}.$$

3. 求证:当 $A,B,A_1,A_2,\cdots,A_n\in(0,\frac{\pi}{2}),\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\geq 0,\alpha_1+\alpha_2+\cdots$

$+\alpha_n=1$ 时,有

(ⅰ) $1-\sin A^{\alpha_1}B^{1-\alpha_1}\geq(1-\sin A)^{\alpha_1}(1-\sin B)^{1-\alpha_1}$.

(ⅱ) $1-\sin A_1^{\alpha_1}A_2^{\alpha_2}\cdots A_n^{\alpha_n}$.

$\geq(1-\sin A_1)^{\alpha_1}(1-\sin A_2)^{\alpha_2}\cdots(1-\sin A_n)^{\alpha_n}$.

4.求证:函数 $y=\dfrac{1}{x}-\cot x$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上是几何凸函数.

5.求证:函数 $y=\dfrac{x}{e^x-1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是几何凹函数.

6.求证:函数 $y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$ 在 $(0,1]$ 上是几何凸函数.

第三章　几类特殊函数的几何凸性

本章将讨论一些特殊函数的几何凸性，包括著名的 *Gamma* 函数.

第一节　一元二次多项式函数的几何凸性

由几何凸函数之和仍为几何凸函数这个性质，不难推知下面的定理 1.1，用几何凸函数的定义和第一章的定理 1.2 的 *Cauchy* 不等式也能证明，它是由文[14]得到的.

定理 1.1　设 $a_i \geq 0, i=0,1,\cdots,n, a_n>0$，则多项式 $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ 在 $(0,+\infty)$ 上为几何凸函数.

推论 1.1　设 $f(x)$ 是具有非负系数的多项式，则

$$f(\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}) \leq \sqrt[n]{f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n)}.$$

这是文[26]中的一个结论.

定理 1.2　多项式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2\,(a_0 \neq 0, a_2 \neq 0)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是几何凸函数的充分必要条件为 $a_0>0, a_1 \geq 0, a_2>0$.

证明　由定理 1.1 知充分性成立，下证必要性. 因 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为正，特别在 0 附近为正，故 $a_0>0$；同时抛物线图像开口要向上，须 $a_2>0$. 又

$$\begin{aligned}
& x[yy''-(y')^2]+yy' \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & x[2a_2(a_0+a_1x+a_2x^2)-(a_1+2a_2x)^2] \\
& +(a_0+a_1x+a_2x^2)(a_1+2a_2x) \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & a_1a_2x^2+4a_0a_2x+a_0a_1 \geq 0,
\end{aligned} \tag{1.1}$$

(1.1)式恒成立，则 $a_1 \geq 0$.

关于一元二次多项式函数在 $(0,+\infty)$ 的几何凹性，作者与李世杰先生得到以下有趣的结果.

定理 1.3　设函数 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2, a_0 \neq 0, a_2 \neq 0$，若 f 在 $(0,\theta)$

和$(\theta,+\infty)$分别是几何凹函数，则 $a_0>0, a_2>0, a_1=-2\sqrt{a_0a_2}$ 且 $\theta=\sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$.

证明　为了使 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为非负，则 $a_0>0, a_2>0$，且

$$a_1^2-4a_0a_2\le 0, \tag{1.2}$$

由第二章的定理 3.3 知：对于 $(0,\theta)$ 和 $(\theta,+\infty)$ 上的每一个 x，有

$$x[f(x)f''(x)-(f'(x))^2]+f(x)f'(x)\le 0$$
$$\Leftrightarrow a_1a_2x^2+4a_0a_2x+a_0a_1\le 0, \tag{1.3}$$

a_1 须为负，且判别式

$$(4a_0a_2)^2-4a_0a_1^2a_2\le 0$$
$$\Leftrightarrow 4a_0a_2-a_1^2\le 0, \tag{1.4}$$

结合(1.2)式和(1.4)式，知 $a_1=-2\sqrt{a_0a_2}$，此时 f 在 $\sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$ 取值为零，所以 $\theta=\sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$，命题得证.

一元二次函数在其它类型的区间如 $(0,a)$，(a,b)，$(a,+\infty)$ 上的几何凸性如何呢？下面将解决一元二次函数几何凸性的判别问题. 当 a_0, a_1, a_2 中不出现零时共有八种情况，归纳成定理 1.4 和定理 1.5 及例 1～例 3，由李世杰先生得到并提供给作者.

一、对于 $a_0a_2>0$ 的情形

当 $a_0>0, a_1\ge 0, a_2>0$ 时，定理 1.1 已解决；当 $a_0<0, a_1<0, a_2<0$ 时，知 $f(x)$ 在 0 附近为负，不可能为几何凸(凹)函数. 其它两种情况结果如下：

定理 1.4　设二次函数 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$，$\Delta=a_1^2-4a_0a_2$，$a_0>0$，$a_1<0$，$a_2>0$，

(ⅰ)当 $\Delta=0$ 时，结论即为定理 1.2：$f(x)$ 在 $(0,\theta]$ 和 $[\theta,+\infty)$ 分别是几何凹函数，其中 $\theta=\sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$.

(ⅱ)当 $\Delta<0$ 时，结论为：$f(x)$ 在 $\left[\frac{2a_0a_2-\sqrt{-a_0a_2\Delta}}{(-a_1)a_2}, \frac{2a_0a_2+\sqrt{-a_0a_2\Delta}}{(-a_1)a_2}\right]$ 上是几何凸函数，在 $\left(0, \frac{2a_0a_2-\sqrt{-a_0a_2\Delta}}{(-a_1)a_2}\right]$ 和 $\left[\frac{2a_0a_2+\sqrt{-a_0a_2\Delta}}{(-a_1)a_2}, +\infty\right)$ 上分别是几何凹函数.

(ⅲ)当 $\Delta>0$ 时,结论为:$f(x)$ 在 $(0,-\frac{a_1+\sqrt{\Delta}}{2a_2})$ 和 $(\frac{-a_1+\sqrt{\Delta}}{2a_2},+\infty)$ 上分别是几何凹函数.

证明 (ⅱ)当 $\Delta<0$ 时,$f(x)>0$ 对任意的 $x\in R_{++}$ 都成立.

记 $T=x[yy''-(y')^2]+yy'=a_1a_2x^2+4a_0a_2x+a_0a_1$(下面简称 T 为微分判别式):

$$\Delta_T=(4a_0a_2)^2-4a_0a_1^2a_2=-4a_0a_2\Delta>0,$$

所以,$T=0$ 有两个解

$$x_1=\frac{2a_0a_2-\sqrt{-a_0a_2\Delta}}{(-a_1)a_2},$$

$$x_2=\frac{2a_0a_2+\sqrt{-a_0a_2\Delta}}{(-a_1)a_2},$$

当 $\frac{2a_0a_2-\sqrt{-a_0a_2\Delta}}{(-a_1)a_2}\leqslant x\leqslant\frac{2a_0a_2+\sqrt{-a_0a_2\Delta}}{(-a_1)a_2}$ 时,$T\geq0$,函数 $f(x)$ 是几何凸函数;当 $0<x\leqslant\frac{2a_0a_2-\sqrt{-a_0a_2\Delta}}{(-a_1)a_2}$ 和 $x\geqslant\frac{2a_0a_2+\sqrt{-a_0a_2\Delta}}{(-a_1)a_2}$ 时,分别有 $T\leq0$,所以 $f(x)$ 是几何凹函数.

(ⅲ)当 $\Delta>0$ 时,$f(x)>0$ 的解为 $0<x<-\frac{a_1+\sqrt{\Delta}}{2a_2}$ 或 $x>-\frac{a_1+\sqrt{\Delta}}{2a_2}$,此时

$$T=x[yy''-(y')^2]+yy'=a_1a_2x^2+4a_0a_2x+a_0a_1,$$

$$\Delta_T=(4a_0a_2)^2-4a_0a_1^2a_2=-4a_0a_2\Delta<0,$$

由于 $a_1a_2<0$,故 $T<0$ 对任意的 $x\in R_{++}$ 都成立. 因此 $f(x)$ 在 $(0,-\frac{a_1+\sqrt{\Delta}}{2a_2})$ 和 $(\frac{-a_1+\sqrt{\Delta}}{2a_2},+\infty)$ 上分别是几何凹函数.

例 1 判断函数 $f(x)=x^2-x+2$ 的几何凸性.

解 这里 $a_2=1>0,a_1=-1<0,a_0=2>0$,

$$\Delta=1^2-4\times2=-7<0,$$

由定理 1.4(ⅱ),知 $f(x)$ 在 $(0,4-\sqrt{14})$ 和 $[4+\sqrt{14},+\infty)$ 上分别是几何凹函数,在 $[4-\sqrt{14},4+\sqrt{14}]$ 上是几何凸函数.

定理 1.5 设二次函数 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$,$\Delta=a_1^2-4a_0a_2$,$a_0<$

$0, a_1>0, a_2<0$,

(ⅰ)当$\Delta \leqslant 0$时，$f(x)$不是几何凸(凹)函数.

(ⅱ)当$\Delta>0$时，$f(x)$在$\left(\frac{-a_1+\sqrt{\Delta}}{2a_2}, -\frac{a_1+\sqrt{\Delta}}{2a_2}\right)$上是几何凹函数.

证明 (ⅰ)因$f(x)\leqslant 0$，结论为显然.

(ⅱ)由$f(x)>0$，解得$x\in\left(\frac{-a_1+\sqrt{\Delta}}{2a_2}, -\frac{a_1+\sqrt{\Delta}}{2a_2}\right)$，此时函数的微分判别式$T$的$\Delta_T=(4a_0a_2)^2-4a_0a_1^2a_2=-a_0a_2\Delta<0$，故$f(x)$是$\left(\frac{-a_1+\sqrt{\Delta}}{2a_2}, -\frac{a_1+\sqrt{\Delta}}{2a_2}\right)$上的凹函数.

例 2 判断函数$f(x)=-x^2+3x-2$的几何凸性.

解 $a_2=-1<0, a_1=3>0, a_0=-2<0$，由$f(x)>0$，解得$x\in(1,2)$. 因为$\Delta=9-8=1>0$，根据定理1.5，$f(x)$是$(1,2)$上的几何凹函数.

二、对于$a_0a_2<0$时，$\Delta>0, \Delta_T<0$情形，$f(x)$几何凸性的一般结果非常复杂，不具体列出，举一例说明判断方法.

例 3 判断函数$f(x)=x^2+4x-12$的几何凸性.

解 由$f(x)>0$得有可能成为几何凸(凹)函数的范围：$x>2$，此时微分判别式$T=4x^2-48x-48=4[(x-6)^2-48]$，当$x>6+4\sqrt{3}$时，$T>0$；当$2<x\leqslant 6+4\sqrt{3}$时，$T\leqslant 0$. 故$f(x)$在$[6+4\sqrt{3},+\infty)$上是几何凸函数，在$(2,6+4\sqrt{3}]$上是几何凹函数.

从上我们可总结出判断一元二次函数$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$几何凸性的基本步骤：

1. 由$f(x)>0$先求出x的有可能成为几何凸(凹)函数的定义区间D.

2. 根据Δ判断，或在定义区间D内判断微分判别式T的正负，从而确定所给函数的几何凸性.

当a_0, a_1中出现零时，用上述两个步骤可以简便地判断二次函数的几何凸(凹)性，在此从略.

第二节 一元高次多项式函数的几何凸性

对于一元n次多项式函数在$(0,+\infty)$上的几何凹性，成都科学院计算研究所的杨路研究员率先用[13]中的知识证明了：一元三次多项式函数，常数项

不为零时，在$(0,+\infty)$上不可能是几何凹函数．后李世杰老师证明了：任意的常数项不为零的一元 n 次多项式函数，在$(0,+\infty)$上不可能是几何凹函数，下面仅给出李老师的结果．

定理 2.1 设函数 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$，$a_0\neq0$，$a_n\neq0$，则 f 在$(0,+\infty)$上不可能为几何凹函数．

证明 若 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 在$(0,+\infty)$上为几何凹函数，为了保证在 0 附近函数值为正，有 $a_0>0$，$x\to+\infty$时，为了保证 f 为非负，有 $a_n>0$．任取 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，有

$$f(\sqrt{x_1x_2})\geq\sqrt{f(x_1)f(x_2)},$$

令 $x_1\to0$，有

$$a_0\geq\sqrt{a_0f(x_2)}$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{a_0}\geq\sqrt{f(x_2)},$$

令 $x_2\to+\infty$即得出矛盾，命题得证．

由于幂函数 $x^i(i=1,2,\cdots,n)$既是几何凸函数又是几何凹函数，所以可把定理 2.1 修改为：

定理 2.2 设函数 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$，$a_n\neq0$，且 f 不是单项式，则 f 在$(0,+\infty)$上不可能为几何凹函数．

证明 若 f 在$(0,+\infty)$上为几何凹函数．因为 f 不是单项式，不妨假定 $a_0=0$，$a_1\neq0$，$n\geq2$，则

$$\frac{f(x)}{x}=a_1+\cdots+a_nx^{n-1},$$

利用第二章的定理(2.1)的(ⅲ)知$\frac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$上为几何凹函数，以下证明与定理 2.1 类似，在此略．

下面再讨论一元三次多项式在$(0,+\infty)$上的几何凸性．

定理 2.3 多项式

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3\,(a_0\neq0,a_3\neq0)$$

在$(0,+\infty)$上是几何凸函数的充分必要条件为 $a_0>0$，$a_1\geq0$，$a_2\geq0$，$a_3>0$．

证明 充分性为显然，下证必要性．$a_0>0$，$a_3>0$ 是显然的，

$$x[yy''-(y')^2]+yy'\geq0$$
$$\Leftrightarrow x[(2a_2+6a_3x)(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)$$
$$-(a_1+2a_2x+3a_3x^2)^2]$$

$$+(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)(a_1+2a_2x+3a_3x^2)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow a_0a_1+4a_0a_2x+(9a_0a_3+a_1a_2)x^2$$

$$+4a_1a_3x^3+a_2a_3x^4\geq 0, \tag{2.1}$$

因为(2.1)恒成立,故 $a_2a_3\geq 0, a_2\geq 0$,又由在原点附近的性质知:$a_0a_1\geq 0$,$a_1\geq 0$.

后来李世杰老师又把定理 2.3 加强为:

定理 2.4 四项多项式函数

$$f(x)=a_0x^s+a_1x^t+a_2x^m+a_3x^n,$$

其中 $a_i\neq 0, i=1,2,3,4; n,m,t,s\in N; n>m>t>s\geq 0$,则 f 为区间 $(0,+\infty)$上的几何凸函数的充分必要条件是 $a_0>0, a_1>0, a_2>0, a_3>0$.

证明 由定理 1.1 知充分性成立,下证必要性.因 $f(x)x^{-s}$在$(0,+\infty)$上为几何凸函数当且仅当 f 是几何凸函数,故不妨设 $s=0$,因 f 在 $x\to 0$,$x\to+\infty$时要为正,所以有 $a_0>0, a_3>0$.又任取 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$,有

$$f(\sqrt{x_1x_2})\leq\sqrt{f(x_1)f(x_2)}, \tag{2.2}$$

令 $x_1\to 0$,有

$$a_0\leqslant\sqrt{a_0f(x_2)}$$

$$\Leftrightarrow a_0\leq a_0+a_1x_2^t+a_2x_2^m+a_3x_2^n$$

$$\Leftrightarrow 0\leq a_1+a_2x_2^{m-t}+a_3x_2^{n-t},$$

再令 $x_2\to 0$,得 $a_1>0$,又由(2.2)式,得

$$(a_0+a_1x_1^t+a_2x_1^m+a_3x_1^n)(a_0+a_1x_2^t+a_2x_2^m+a_3x_2^n)$$

$$-[a_0+a_1(x_1x_2)^{\frac{t}{2}}+a_2(x_1x_2)^{\frac{m}{2}}+a_3(x_1x_2)^{\frac{n}{2}}]^2\geq 0,$$

上式展开合并同类项后,含 x_2 的最高次 x_2^n 的系数为 $a_2a_3x_1^m$,其必须为正,即知 $a_2>0$.

对于一元四次多项式,其为几何凸函数的用系数来表示的充分必要条件,至今还没有得到,目前只能得到以下一个结果.

定理 2.5 多项式

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4(a_0\neq 0, a_4\neq 0)$$

在$(0,+\infty)$上是几何凸函数的一个必要条件为 $a_0>0, a_1\geq 0, a_3\geq 0, a_4>0$.

证明 当 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$ 为$(0,+\infty)$上的几何凸函数时,显然有 $a_0>0, a_4>0$,又

$$
\begin{aligned}
& x[yy''-(y')^2]+yy'\geq 0 \\
\Leftrightarrow & x[(2a_2+6a_3x+12a_4x^2)(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4) \\
& -(a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3)^2] \\
& +(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4) \\
& \times(a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3)\geq 0 \\
\Leftrightarrow & a_0a_1+4a_0a_2x+(9a_0a_3+a_1a_2)x^2+(16a_0a_4+4a_1a_3)x^3 \\
& +(9a_1a_4+a_2a_3)x^4+4a_2a_4x^5+a_3a_4x^6\geq 0, \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

因为(2.3)恒成立,故 $a_3a_4\geq 0, a_3\geq 0$,又由在原点附近的性质知:$a_0a_1\geq 0$, $a_1\geq 0$.

下面的例 1 说明一元四次多项式没有类似定理 2.3 的结果.

例 1 求证多项式函数 $f(x)=1+x-x^2+x^3+x^4$ 在 $(0,+\infty)$ 上为几何凸函数.

证明 易知 $x-x^2+x^3=x(1-x+x^2)=x[(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]$ 在 $(0,+\infty)$ 上非负,所以 $f(x)=1+x-x^2+x^3+x^4$ 在 $(0,+\infty)$ 上为正,又从定理 2.5 的证明过程,得

$$
\begin{aligned}
& x[yy''-(y')^2]+yy'\geq 0 \\
\Leftrightarrow & 1-4x+8x^2+20x^3+8x^4-4x^5+x^6\geq 0 \\
\Leftrightarrow & (1-2x)^2+4x^2+20x^3+4x^4+x^4(2-x)^2\geq 0,
\end{aligned}
$$

所以 $f(x)=1+x-x^2+x^3+x^4$ 在 $(0,+\infty)$ 上为几何凸函数.

例 2 (1990 年第 24 届全苏联奥林匹克试题)设 $f(x)=ax^2+bx+c$,系数 a,b,c 都为正数且 $a+b+c=1$,则对于任意 n 个正数 x_k 满足 $\prod_{k=1}^{n}x_k=1$ 时,都有:

$$\prod_{k=1}^{n}f(x_k)\geq 1.$$

证明 根据定理 1.2 知 f 在 $(0,+\infty)$ 上为几何凸函数,由第二章的定理 1.1 有

$$\prod_{k=1}^{n}f(x_k)\geq f^n\left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}x_k}\right)=f^n(1)=(a+b+c)^n=1.$$

从证明过程来看,f 为任意次多项式,只要满足系数为非负,且其和为 1,命题就成立.

第三节 函数项级数的几何凸性

本节讨论函数项极限的几何凸凹性.

定理 3.1 设几何凸函数列$\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$在区间 $I\subseteq R_{++}$ 上有定义,且收敛于连续函数 $f(x)$,则 f 在 I 上也是几何凸函数.

证明 任取 $x,y\in I$,由于对一切 n,有

$$f_n(\sqrt{xy})\leq\sqrt{f_n(x)f_n(y)},$$

对 n 取极限,有

$$f(\sqrt{xy})\leq\sqrt{f(x)f(y)},$$

故 f 在 I 上是几何凸函数.

定理 3.2 设几何凹函数列$\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$在区间 $I\subseteq R_{++}$ 上有定义,且收敛于连续函数 $f(x)$,则 f 在 I 上也是几何凹函数.

证明类似定理 3.1,在此从略.

推论 3.1 设几何凸函数列$\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$在区间 $I\subseteq R_{++}$ 上有定义,且 $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}f_i(x)$在 I 上局部一致收敛于$f(x)$,则 f 在 I 上也是几何凸函数.

这里一致收敛是为了保证 f 的连续性,结论显然.必需注意的是推论 3.1 中的 f 为几何凹函数时,相应的命题不一定成立,其实在第二章第三节的例 4 已说明两个几何凹函数之和有可能为几何凸函数.

推论 3.2[14] 设函数项级数 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{+\infty}a_ix^i$ 的系数 $a_i(i\in N)$为非负,收敛半径为 r,则 f 在$(0,r)$上几何凸函数.

证明 设 $f_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$,由定理 2.1 和推论 3.1 知 f 在$(0,r)$上几何凸函数.

定理 3.3 设函数项无穷乘积 $f(x)=\prod\limits_{i=1}^{+\infty}f_i(x)$在 $I\subseteq R_{++}$ 上收敛,且 f 为连续,$f_n(x)(n=1,2,\cdots)$在 I 上为几何凸(凹)函数,则 f 在 I 上也为几何凸(凹)函数.

利用几何凸(凹)函数的定义不难证明定理 3.3.根据以上结果,可判别许多函数的几何凸凹性.

例 1 求证:拉伯耳特级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{1-x^n}$在$(0,1)$上为几何凸函数.

证明 在区间(0,1)上,有

$$\frac{1}{1-x^n}=1+x^n+x^{2n}+\cdots,$$

由推论 3.2 知$\frac{1}{1-x^n}$在(0,1)上为几何凸函数,又由定理 2.1 的(ⅱ)知$\frac{x^n}{1-x^n}$在(0,1)上为几何凸函数,再由推论 3.1 知$\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1-x^n}$在(0,1)上是几何凸函数,证毕.

例 2 设 $f_n(x)=n(x^{\frac{1}{n}}-1),x\in(1,+\infty),n=1,2,\cdots$,因 $x^{\frac{1}{n}}$ 在$(0,+\infty)$上是几何凹函数,由第二章定理 2.2 的(ⅳ)知:$x^{\frac{1}{n}}-1$ 在$(0,+\infty)$上是几何凹函数,所以 f_n 是几何凹函数,又

$$\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=\lim_{n\to+\infty}n(x^{\frac{1}{n}}-1)=\ln x,$$

所以函数 $y=\ln x$ 在$(1,+\infty)$上是几何凹函数.

例 3 (ⅰ)函数

$$y=shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

在$(0,+\infty)$上是几何凸函数.

(ⅱ)函数

$$y=chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{x^{2i}}{(2i)!},$$

在$(0,+\infty)$上是几何凸函数.

(ⅲ)函数

$$\begin{aligned}y=\arcsin x&=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\\&=\int_0^x[1+\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{(2i-1)!!t^{2i}}{(2i)!!}]dt\\&=x+\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{(2i-1)!!x^{2i+1}}{(2i)!!(2i+1)}\end{aligned}$$

在(0,1]上是几何凸函数.

引理 3.1 (ⅰ)若 $0<a<1$,则 $1-a^x$ 在$(0,+\infty)$是几何凹函数.

(ⅱ)若 $a>1$,则 a^x-1 在$(0,+\infty)$是几何凸函数.

证明 (ⅰ)设 $f(x)=1-a^x$,则

$$\frac{xf'(x)}{f(x)}=\frac{-xa^x\ln a}{1-a^x},$$

$$\left(\frac{xf'(x)}{f(x)}\right)'=\left(\frac{-xa^x\ln a}{1-a^x}\right)'$$

$$=-\frac{[a^x\ln a+xa^x(\ln a)^2](1-a^x)+xa^{2x}(\ln a)^2}{(1-a^x)^2},$$

又

$$a^x\ln a-a^{2x}\ln a+xa^x(\ln a)^2-xa^{2x}(\ln a)^2+xa^{2x}(\ln a)^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^x\ln a(1-a^x+x\ln a)\geq 0,$$

所以只要证

$$1-a^x+x\ln a\leq 0, \tag{3.1}$$

再令 $g(x)=1-a^x+x\ln a, x\in[0,+\infty)$,则 $g(0)=0$,且有

$$g'(x)=-a^x\ln a+\ln a=\ln a(1-a^x)\leq 0,$$

故(3.1)式成立,由第二章的定理 3.3 知结论(ⅰ)成立.

同理可证结论(ⅱ)也成立.

推论 3.3　(ⅰ)设 $0<a<1$,则对任意 $x_1,x_2>0$,有

$$a^{x_1}+a^{x_2}+a^{2\sqrt{x_1x_2}}\geq 2a^{\sqrt{x_1x_2}}+a^{x_1+x_2}. \tag{3.2}$$

(ⅱ)设 $a>1$,则对任意 $x_1,x_2>0$,有

$$a^{x_1}+a^{x_2}+a^{2\sqrt{x_1x_2}}\leq 2a^{\sqrt{x_1x_2}}+a^{x_1+x_2}. \tag{3.3}$$

证明　(ⅰ)由引理 3.1 知

$$(1-a^{\sqrt{x_1x_2}})^2\geq(1-a^{x_1})(1-a^{x_2})$$

$$\Leftrightarrow a^{x_1}+a^{x_2}+a^{2\sqrt{x_1x_2}}\geq 2a^{\sqrt{x_1x_2}}+a^{x_1+x_2}.$$

(ⅱ)同样,由引理 3.2(ⅱ)知(3.3)也成立.

定理 3.4　黎曼函数 $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上是几何凸函数.

证明　由于黎曼函数可表示为 $\zeta(x)=\prod_{i=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{p_i^x}\right)^{-1}$,其中 $\{p_i\}_{i=1}^{+\infty}$ 为所有素数从小到大构成的数列,根据引理 3.1 知 $1-\left(\frac{1}{p_i}\right)^x$ 在 $(1,+\infty)$ 上是几何凹函数,由第二章的定理 2.1 的(ⅰ)知 $\left(1-\frac{1}{p_i^x}\right)^{-1}$ 在 $(1,+\infty)$ 上是几何凸函数,再由定理 3.3 知 $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ 为几何凸函数.

因 $\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上是几何凹函数,所以黎曼函数是无穷多个几何凹函数

相加的几何凸函数.

例 4 因为 $\sin x = x\prod_{n=1}^{+\infty}(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2})$，且由第二章定理 2.2 的(ⅳ)知 $(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2})$在$(0,\frac{\pi}{2}]$上为几何凹函数，从而 $\sin x = x\cdot\prod_{n=1}^{+\infty}(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2})$在$(0,\pi)$也是几何凹函数；同理 $\cos x = \prod_{n=1}^{+\infty}(1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2})$在$(0,\frac{\pi}{2})$上几何凹函数，$shx = x\prod_{n=1}^{+\infty}(1+\frac{x^2}{n^2\pi^2})$在$(0,+\infty)$上为几何凸函数，$chx = \prod_{n=1}^{+\infty}(1+\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2})$在$(0,+\infty)$上为几何凸函数.

第四节 Γ 函数的几何凸性

对于著名 *Gamma* 的函数，本节讨论定义域为$(0,+\infty)$内的情形，其有以下四个表达式：

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt,$$

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)},$$

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\prod_{n=1}^{+\infty}[(1+\frac{1}{n})^x(1+\frac{x}{n})^{-1}], \tag{4.1}$$

$$\Gamma(x) = \frac{1}{xe^{\gamma x}}\prod_{n=1}^{+\infty}[(1+\frac{x}{n})^{-1}e^{\frac{x}{n}}], \tag{4.2}$$

其中 $\gamma\approx 0.5772156649\cdots$为欧拉常数.关于四个定义的等价性，可参看文献[32]的第九章和第十章.文献[2]、[3]和[5]研究了它的对数凸性.

1992 年文[46]提出几何凸函数这个概念，而 1990 年的文[48]中研究 *Gamma* 的几何凸性(后称为的)，所以其在证明技巧上没有运用几何凸函数的有关性质，这里将给出的是青岛教育学院的续铁权教授与作者对 *Gamma* 的几何凸性的阐述，对下面介绍的重要常数 μ 的存在和数值的大小进行严格地论证，弥补了文[46]中的不足.

引理 4.1 函数 $p(t)=\frac{1}{\sqrt{t\ln(1+t)}}-\frac{1}{t}$在$(0,+\infty)$上为严格单调递减

函数，且 $p(t)<\frac{1}{4}$.

证明 要证明 $p(t)$在$(0,+\infty)$上单调递减函数，即要证

$$p'(t)=-\frac{\ln(1+t)+\frac{t}{1+t}}{2[t\ln(1+t)]^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{t^2}<0$$

$$\Leftrightarrow t^2[\ln(1+t)+\frac{t}{1+t}]>2t^{\frac{3}{2}}[\ln(1+t)]^{\frac{3}{2}}$$

$$\Leftrightarrow t[(1+t)\ln(1+t)+t]^2>4(1+t)^2[\ln(1+t)]^3, \tag{4.3}$$

注意$[(1+t)\ln(1+t)+t]^2\geq 4t(1+t)\ln(1+t)$，为了证明(4.3)式，只要证明

$$q(t)=(1+t)[\ln(1+t)]^2-t^2<0,$$

对 $q(x)$二次微分，得

$$q'(t)=[\ln(1+t)]^2+2\ln(1+t)-2t,$$

$$q''(t)=\frac{2[\ln(1+t)-t]}{1+t}$$

因 $q'(0)=0$ 和 $q''(t)<0$，得 $q'(t)<0$，再由 $q(0)=0$，得 $q(t)<0$. 从而(4.3)得证. 下面再证明

$$\lim_{t\to 0}p(t)=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t}-\sqrt{\ln(1+t)}}{t\sqrt{\ln(1+t)}}=\frac{1}{4},$$

令 $u=\sqrt{\ln(1+t)}$，当 $t\to 0$ 时，有 $u\to 0$，则有

$$t=e^{u^2}-1=u^2-\frac{u^4}{2}+o(u^4),$$

$$\sqrt{t}=u\sqrt{1+\frac{u^2}{2}+o(u^2)}=u[1+\frac{u^2}{4}+o(u^2)],$$

于是

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t}-\sqrt{\ln(1+t)}}{t\sqrt{\ln(1+t)}}=\lim_{u\to 0}\frac{u+\frac{u^3}{4}+o(u^3)-u}{u[u^2+o(u^2)]}=\frac{1}{4},$$

由于 $p(t)$在$(0,+\infty)$上为严格单调递减，故有 $p(t)<\frac{1}{4}$.

推论 4.1 设 n 为任一正自然数，则方程

$$\ln(1+\frac{1}{n})=\frac{n}{(x+n)^2}$$

在$(0,+\infty)$上有唯一正根 λ_n,且数列$\{\lambda_n\}$严格增加且以$\frac{1}{4}$为其上界.

证明

$$\ln(1+\frac{1}{n})=\frac{n}{(x+n)^2}$$

$$\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{n}{\ln(1+\frac{1}{n})}}-n=\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n})}}-n,$$

所以 λ_n 的存在性为明显,又由引理 4.1 知$\{\lambda_n\}$严格单调递增,且 $0<\lambda_n<\frac{1}{4}$,证毕.

下面记 $g_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{(x+k)^2}$,讨论方程

$$G_n(x)=\ln(n+1)-g_n(x)=0 \tag{4.4}$$

的根. 显见 $g_n(x)$在$[0,+\infty)$上严格单调递减, $G_n(x)$在$[0,+\infty)$上严格单调递增. 又在推论 4.1 中,对于 k 为任一正自然数,有

$$\ln(1+\frac{1}{k})=\frac{k}{(\lambda_k+k)^2}>\frac{k}{(\frac{1}{4}+k)^2}$$

$$\Rightarrow \ln\frac{k+1}{k}>\frac{k}{(\frac{1}{4}+k)^2},$$

从 $k=1$ 到 $k=n$ 求和,得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+\frac{1}{4})^2}<\ln(n+1),$$

即 $G_n(\frac{1}{4})>0$,又 $G_n(0)<0$ 为一熟知不等式,从而由连续函数的价值性定理知方程 $G_n(x)=0$ 有唯一正根 $\mu_n\in(0,\frac{1}{4})$.

对上述的$\{\mu_n\}$有以下引理成立.

引理 4.2 数列$\{\mu_n\}$严格单调增加,且当 $n\geq 2$, $\mu_n<\lambda_n$,其中 λ_n 的意义同为推论 4.1.

证明 显见 $\mu_1=\lambda_1=\frac{1}{\sqrt{\ln 2}}-1=0.201\cdots$. 由 μ_1,λ_2 的定义知

$$\ln 2=\frac{1}{(\mu_1+1)^2},\quad \ln(1+\frac{1}{2})=\frac{2}{(\lambda_2+2)^2},$$

两式相加，得

$$\ln 3 = \frac{1}{(\mu_1+1)^2} + \frac{2}{(\lambda_2+2)^2}, \tag{4.5}$$

因 $\mu_1 = \lambda_1 < \lambda_2$，由(4.5)得

$$g_2(\lambda_2) = \frac{1}{(\lambda_2+1)^2} + \frac{2}{(\lambda_2+2)^2} < \ln 3;$$

另一方面，由 μ_2 的定义有

$$\ln 3 = \frac{1}{(\mu_2+1)^2} + \frac{2}{(\mu_2+2)^2} = g_2(\mu_2),$$

上两式比较得 $g_2(\lambda_2) < g_2(\mu_2)$，由于 $g_2(x)$ 为严格单调递减，由此得 $\mu_2 < \lambda_2$. 下用数学归纳法，假定

$$\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_{n-1} < \lambda_{n-1} (n \geq 3),$$

由 μ_{n-1}, λ_n 的定义知

$$\ln n = g_{n-1}(\mu_{n-1}), \quad \ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{n}{(\lambda_n+n)^2},$$

两式相加，得

$$\ln(n+1) = g_{n-1}(\mu_{n-1}) + \frac{n}{(\lambda_n+n)^2}, \tag{4.6}$$

注意 $\mu_{n-1} < \lambda_{n-1} < \lambda_n$，由(4.6)式推得

$$\ln(n+1) < g_{n-1}(\mu_{n-1}) + \frac{n}{(\mu_{n-1}+n)^2} = g_n(\mu_{n-1}),$$

同时由 $g_{n-1}(x)$ 的单调递减性及(4.6)式有

$$\ln(n+1) > g_{n-1}(\lambda_n) + \frac{n}{(\lambda_n+n)^2} = g_n(\lambda_n),$$

另一方面，由 μ_n 的定义知 $\ln(n+1) = g_n(\mu_n)$，与上两式比较得

$$g_n(\lambda_n) < g_n(\mu_n) < g_n(\mu_{n-1})$$
$$\Leftrightarrow \lambda_n > \mu_n > \mu_{n-1},$$

所以有 $\mu_1 < \mu_2 < \cdots \mu_{n-1} < \mu_n < \lambda_n$，由数学归纳法原理，引理 4.2 得证.

由引理 4.2 知数列 $\{\mu_n\}$ 严格增加且以 $\frac{1}{4}$ 为上界，故数列 $\{\mu_n\}$ 有极限，设 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n = \mu \leq \frac{1}{4}$. 这就是以下提及的 μ 的由来.

定理 4.1[48]　$\Gamma(x)$ 在 $(0, \mu]$ 上是几何凹函数，在 $[\mu, +\infty)$ 上是几何凸函

数.

证明 由$\Gamma(x)=\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{m!\ m^{x}}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+m)}$得

$$\Gamma(x)=\lim_{m\to\infty}\frac{m!\ (m+1)^{x}}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+m)},\tag{4.7}$$

记 $f_m(x)=\dfrac{m!\ (m+1)^{x}}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+m)}$,则

$$\ln f_m(x)=\ln m!+x\ln(m+1)-\sum_{k=0}^{m}\ln(x+k),$$

$$\frac{xf_m'(x)}{f_m(x)}=x(\ln f_m(x))'=x\ln(m+1)-\sum_{k=0}^{m}\frac{x}{x+k}$$

$$=x\ln(m+1)-(m+1)+\sum_{k=1}^{m}\frac{k}{x+k},$$

故

$$\left(\frac{xf_m'(x)}{f_m(x)}\right)'=\ln(m+1)-\sum_{k=1}^{m}\frac{k}{(x+k)^2}=G_m(x),\tag{4.8}$$

因 $G_m(x)$在$[0,+\infty)$上为严格单调递增，又由 u_m 的定义及$G_m(x)$的性质知:当 $x\in(0,\mu_m]$，有 $G_m(x)\le0$,由第二章定理 3.3 知 $f_m(x)$是$(0,\mu_m]$上的几何凹函数.

下先证 $\Gamma(x)$在$(0,\mu]$上是几何凹函数,根据函数的连续性知,只要证 $\Gamma(x)$是在$(0,\mu)$上是几何凹函数. 任取 $x,y\in(0,\mu)$，则存在充分大的 $m\in N$,使得 $x,y\in(0,\mu_m]$，因 $f_m(x)$是$(0,\mu_m]$上的几何凹函数,由定义知

$$f_m(\sqrt{xy})\ge\sqrt{f_m(x)f_m(y)},$$

两边对 m 取极限,参考(4.7)式有

$$\Gamma(\sqrt{xy})\ge\sqrt{\Gamma(x)\Gamma(y)},$$

因而 $\Gamma(x)$是$(0,\mu]$上的几何凹函数.

同时由(4.8)式、u_m 的定义及 $G_m(x)$的性质知,函数 $f_m(x)$在$[u_m,+\infty)$上为几何凸函数,因 $u_m<u$,故 $f_m(x)$在$[u,+\infty)$上为几何凸函数,由(4.7)式和第二章定理 3.1 知 $\Gamma(x)$在$[\mu,+\infty)$上为几何凸函数.

从定理 1 可以看出 μ 是一个重要常数. 下面估计其值.

引理 4.3 （i）若存在 $n\in N_{++}$ 和 $x_0\in(0,0.25]$,使得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+x_0)^2}-\ln\left(n+\frac{1}{2}+x_0\right)-\frac{2x_0}{2n+1+2x_0}<0, \qquad (4.9)$$

则 $\mu\leq x_0$.

(ⅱ)若存在 $n\in N_{++}$ 和 $x_1\in(0,0.25]$,使得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+x_1)^2}+\frac{n+1}{2(n+1+x_1)^2}-\ln(n+1+x_1)-\frac{x_1}{n+1+x_1}>0, \qquad (4.10)$$

则 $\mu>x_1$.

证明 下面用反证法证明引理.

(ⅰ)若 $0<x_0<\mu$,则存在 k 使 $x_0\leq\mu_k$,于是对一切 $m\geq k$, $x_0\leq\mu_m$,下面引进函数,设 $h(t)=\frac{t}{(t+x)^2}$,其中 $t\in[\frac{1}{2},+\infty)$, $x\in(0,0.25]$,则

$$h'(t)=\frac{x-t}{(t+x)^3},\qquad h''(t)=\frac{2t-4x}{(t+x)^4},$$

故函数 h 是凸函数,由第一章的定理 4.1 的 Hadamard 不等式,得

$$\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\frac{tdt}{(t+x)^2}\geq\frac{k}{(k+x)^2},$$

令 $k=n+1,n+2,\cdots,m(m\geq n+1)$,将所得的不等式相加,简记 $s(n,m)=\sum_{k=n+1}^{m}\frac{k}{(k+x)^2}$,得

$$s(n,m)\leq\int_{n+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}\frac{tdt}{(t+x)^2}=\ln\left(m+\frac{1}{2}+x\right)-\ln\left(n+\frac{1}{2}+x\right)+\frac{2x}{2m+1+2x}-\frac{2x}{2n+1+2x},$$

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{k}{(k+x)^2}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+x)^2}+\ln\left(m+\frac{1}{2}+x\right)-\ln\left(n+\frac{1}{2}+x\right)+\frac{2x}{2m+1+2x}-\frac{2x}{2n+1+2x}, \qquad (4.11)$$

再令

$$f(m,n;x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+x)^2}+\ln\left(m+\frac{1}{2}+x\right)-\ln\left(n+\frac{1}{2}+x\right)+\frac{2x}{2m+1+2x}-\frac{2x}{2n+1+2x}-\ln(m+1),$$

由 μ_m 的定义知

$$f(m,n,u_m)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+u_m)^2}+\ln\left(m+\frac{1}{2}+u_m\right)-\ln\left(n+\frac{1}{2}+\mu_m\right)$$
$$+\frac{2\mu_m}{2m+1+2\mu_m}-\frac{2\mu_m}{2n+1+2\mu_m}-\ln(m+1)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+u_m)^2}+\ln\left(m+\frac{1}{2}+u_m\right)-\ln\left(n+\frac{1}{2}+\mu_m\right)$$
$$+\frac{2\mu_m}{2m+1+2\mu_m}-\frac{2\mu_m}{2n+1+2\mu_m}-\sum_{k=1}^{m}\frac{k}{(k+u_m)^2}\geq 0,$$

其中上式最后的论断,是根据 $\mu_m\leq\frac{1}{4}$ 和(4.11)式所致, 易证 $f(m,n,x)$ 关于 x 严格单调递减. 所以根据 $x_0\leq\mu_m(m\geq k)$, 有 $f(m,n,x_0)\geq f(m,n,\mu_m)\geq 0$, 即

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+x_0)^2}+\ln\left(m+\frac{1}{2}+x_0\right)-\ln\left(n+\frac{1}{2}+x_0\right)$$
$$+\frac{2x_0}{2m+1+2x_0}-\frac{2x_0}{2n+1+2x_0}-\ln(m+1)\geq 0,$$

所以当上式令 $m\to+\infty$ 取极限,可证有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+x_0)^2}-\ln\left(n+\frac{1}{2}+x_0\right)-\frac{2x_0}{2n+1+2x_0}\geq 0,$$

这与(4.9)矛盾,故 $x_0\geq\mu$.

(ⅱ)类似地,仍然由 Hadamard 不等式,得

$$\int_k^{k+1}\frac{t\mathrm{d}t}{(t+x)^2}\leq\frac{1}{2}\left[\frac{k+1}{(k+1+x)^2}+\frac{k}{(k+x)^2}\right],$$

令 $k=n+1,n+2,\cdots,m-1(m\geq n+2)$,将所得的不等式相加,得

$$s(n+1,m-1,x)+\frac{1}{2}\left[\frac{n+1}{(n+1+x)^2}+\frac{m}{(m+x)^2}\right]$$
$$\geq\ln(m+x)-\ln(n+1+x)+\frac{x}{m+x}-\frac{x}{n+1+x},$$

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{k}{(k+x)^2}\geq\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+x)^2}+\ln(m+x)-\ln(n+1+x)$$
$$+\frac{x}{m+x}-\frac{x}{n+1+x}+\frac{1}{2}\left[\frac{n+1}{(n+1+x)^2}+\frac{m}{(m+x)^2}\right],\quad(4.12)$$

若 $x_1 \geq \mu$，则对于一切 m 有 $x_1 > \mu_m$ 不妨设 $m \geq n+2$. 此时设

$$g(m,n,x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+x)^2} + \ln(m+x) - \ln(n+1+x) + \frac{x}{m+x} - \frac{x}{n+1+x} + \frac{1}{2}\left[\frac{n+1}{(n+1+x)^2} + \frac{m}{(m+x)^2}\right] - \ln(m+1),$$

在(4.12)式中令 $x = \mu_m$，注意 $\sum_{k=1}^{m} \frac{k}{(k+x)^2} = \ln(m+1)$，得

$$g(m,n,\mu_m) \leq 0,$$

易证 $g(m,n,x)$ 关于 x 为严格单调递减，所以当 $x_1 \geq \mu > \mu_m$ 时，有

$$g(m,n,x_1) \leq 0,$$

在上式中令 $m \to +\infty$ 取极限，有

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+x_1)^2} + \frac{n+1}{2(n+1+x_1)^2} - \ln(n+1+x_1) - \frac{x_1}{n+1+x_1} \leq 0,$$

这与(4.10)矛盾，所以 $x_1 < \mu$.

根据引理 4.3，可设计一个程序，当取 $n=20$，$x_0 = 0.216$ 时，则算得

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+x_0)^2} + \frac{n+1}{2(n+1+x_0)^2} - \ln(n+1+x_0) - \frac{x_0}{n+1+x_0} > 0,$$

所以 $\mu > 0.216$；当取 $n=20$，$x_0 = 0.2162$ 时，则算得

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+x_0)^2} - \ln\left(n+\frac{1}{2}+x_0\right) - \frac{2x_0}{2n+1+2x_0} < 0,$$

所以 $\mu \leq 0.2162$. 据此得知 $\mu = 0.216\cdots$.

由定理 4.1 及几何凸凹函数的定义，可直接得到下推论 4.2 和推论 4.3.

推论 4.2 设 $x_i \in [u, +\infty)$，则有

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \Gamma(x_i)} \geq \Gamma\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}\right). \tag{4.13}$$

众所周知，函数 $\Gamma(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上先递减后递增，在 $\alpha_0 = 1.4616321\cdots$ 处取最小值. 又[3]的第 390 页中指出，$\Gamma(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为对数凸函数，因此有以下这个重要的不等式.

引理 4.4 设 $x_i \in (0,+\infty)$，则有

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \Gamma(x_i)} \geq \Gamma\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right). \tag{4.14}$$

那么(4.13)式和(4.14)式谁强，答案是不相上下，当 $x_i \in [\mu, +\infty)$，

$i=1,2,\cdots,n$ 时,若 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\le\alpha_0$ 则(4.13)式强;若 $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}\ge\alpha_0$,则(4.14)式强.

推论 4.3 设 $x_i\in(0,\mu]$,则有

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\Gamma(x_i)}\le\Gamma\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}\right). \tag{4.15}$$

定理 4.2 函数 $e^{\gamma x}\Gamma(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是几何凸函数,其中 $\gamma\approx0.5772156649\cdots$ 为欧拉常数,且这里 γ 是最小的.

证明 在 $(0,+\infty)$ 上设 $f(x)=(1+\frac{x}{n})^{-1}e^{\frac{x}{n}}$,有

$$f'(x)=[(1+\frac{x}{n})^{-1}e^{\frac{x}{n}}]'$$

$$=\frac{\frac{1}{n}(1+\frac{x}{n})-\frac{1}{n}}{(1+\frac{x}{n})^2}e^{\frac{x}{n}}=\frac{\frac{x}{n^2}}{(1+\frac{x}{n})^2}e^{\frac{x}{n}},$$

$$\frac{xf'(x)}{f(x)}=\frac{\frac{x^2}{n^2}}{(1+\frac{x}{n})^2}e^{\frac{x}{n}}\cdot\frac{1+\frac{x}{n}}{e^{\frac{x}{n}}}=\frac{x^2}{n^2+nx},$$

$$[\frac{xf'(x)}{f(x)}]'=\frac{2x(n^2+nx)-nx^2}{(n^2+nx)^2}=\frac{2n^2x+nx^2}{(n^2+nx)^2}>0,$$

由第二章的定理3.3知 $(1+\frac{x}{n})^{-1}e^{\frac{x}{n}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上为几何凸函数,其中 $n=1,2\cdots$,由于 $\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是几何凸函数,由(4.2)式及本章的定理3.3知:函数 $e^{\gamma x}\Gamma(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是几何凸函数.

若存在常数 b,使得函数 $e^{bx}\Gamma(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是几何凸函数,(4.2)式代入,记 $g(x)=e^{bx}\Gamma(x)=\frac{e^{(b-\gamma)x}}{x}\prod_{n=1}^{+\infty}[(1+\frac{x}{n})^{-1}e^{\frac{x}{n}}]$,则在 $(0,+\infty)$ 上有

$$[\frac{xg'(x)}{g(x)}]'=[x(\ln g(x))']'=(b-\gamma)+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n^2x+nx}{(n^2+nx)^2}\ge0,$$

又在 $(0,1)$ 上,级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n^2x+nx}{(n^2+nx)^2}$ 显然一致收敛,上式令 $x\to0+$,有

$$b-\gamma\ge0,$$

故知这里 γ 是最小的.

推论 4.4　设 $x_i>0, i=1,2,\cdots n,$，则有

$$\Gamma\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}\right) \le e^{\gamma\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}-\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}\right)} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \Gamma(x_i)}.$$

证明　因 $e^{\gamma x}\Gamma(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是几何凸函数，因而有

$$e^{\gamma\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}}\Gamma\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}\right) \le \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} e^{\gamma-x_i}\Gamma(x_i)},$$

$$\Gamma\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}\right) \le e^{\gamma}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}-\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}\right) \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \Gamma(x_i)}.$$

下面再建立一个不等式，先引入以下引理.

引理 4.5　设 $x_i, x_2, \cdots, x_n \in (0, \alpha_0-1)$ 则

$$\prod_{i=1}^{n} \Gamma(x_i) \ge \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n\prod_{i=1}^{n} x_i}\Gamma^n\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right).$$

证明　设 $y=1+x$，有

$$yy''-(y')^2=-1\le 0,$$

故 $y=1+x$ 为对数凹函数，有

$$\alpha_0 \ge 1+\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \ge \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)}.$$

又有

$$\prod_{i=1}^{n}\Gamma(x_i) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i}\prod_{i=1}^{n}\Gamma(1+x_i)$$

$$\overset{(4.16)}{\ge} \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i}\Gamma^n\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)}\right)$$

$$\overset{(4.17)}{\ge} \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i}\Gamma^n\left(1+\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n\prod_{i=1}^{n} x_i}\Gamma^n\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right),$$

其中(4.16)式是由(4.13)式导出，(4.17)式是由于 α_0 为 $\Gamma(x)$ 的最小值点，$\Gamma(x)$ 在 $(0,\alpha_0)$ 上为递减的所致，至此命题得证.

在引理 4.5 的条件下，得到的结果比经典的引理 4.4 明显要强.

定理 4.3 设 $x,y\in(0,\mu)$,则

$$\frac{(x+y)^2}{4xy}\Gamma^2\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\Gamma(x)\Gamma(y)$$
$$\le\Gamma^2(\sqrt{xy})\le e^{\gamma(x+y-2\sqrt{xy})}\Gamma(x)\Gamma(y)$$

成立.

证明 不等式的左边显然可由引理 4.5 推得,中间式可由推论 4.2 推得,右边由推论 4.4 推得,证毕.

下面的定理 4.4 揭示了 $\Gamma(x)$ 在 0 附近的特性.

定理 4.4 对任意不小于 2 的正整数 n,有不等式

$$n!\Gamma^{n-1}\left(\sqrt[n-1]{\frac{n+1}{2}}\right)\le\prod_{k=2}^{n}\Gamma\left(\frac{1}{k}\right).\tag{4.18}$$

证明 对于 $k=2,\cdots,n,$,由[11]第 561 页的主要公式,有

$$k\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{k}\right),$$

$$n!\prod_{k=2}^{n}\Gamma\left(\frac{k+1}{k}\right)=\prod_{k=2}^{n}\Gamma\left(\frac{1}{k}\right),$$

因 $\Gamma(x)$ 在 $[\mu,+\infty)$ 上为几何凸函数,所以有

$$n!\left(\Gamma\left(\sqrt[n-1]{\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}}\right)\right)^{n-1}\le\prod_{k=2}^{n}\Gamma\left(\frac{1}{k}\right),$$

即知不等式(4.18)成立.

第五节 再介绍若干结果

李世杰先生自 1988 年起,利用函数变换研究几何凸函数,取得了一系列结果,这在本书的一些地方和有关文献中可以看出,在这节中还要介绍李先生的几个定理和推论[21]、[27].

定理 5.1 设 f 是区间 $M\subseteq R_{++}$ 上的几何凸函数,若

(ⅰ) $\alpha_i>0, x_i\in M, i=1,2,\cdots,m, m>1$;

(ⅱ) $\beta_i>0, y_i\in M, i=1,2,\cdots,n, n>1$;

(ⅲ) $0<x_1\le\cdots\le x_k\le y_1\le\cdots\le y_n\le x_{k+1}\le\cdots\le x_m$,且 $1\le k\le m-1$;

(ⅳ) $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=\sum_{i=1}^{n}\beta_i, \prod_{i=1}^{m}x_i^{\alpha_i}=\prod_{i=1}^{n}y_i^{\beta_i}$;

则有

$$\prod_{i=1}^{m} f^{\alpha_i}(x_i) \geq \prod_{i=1}^{n} f^{\beta_i}(y_i). \tag{5.1}$$

当 f 是 M 上的几何凹函数时，(5.1)中的不等式要反向. 当 $f(x)$ 在 M 内的任何区间上不是形如 $ax^{\alpha}(a\alpha\neq 0)$ 的函数时，

(1)若 $x_k = x_{k+1}$，则当且仅当 $x_1 = \cdots = x_m = y_1 = \cdots y_n$ 时，(5.1)式等式成立.

(2) 若 $x_k < x_{k+1}$ 时，当且仅当存在某个 p(p 为 $1,2.\cdots,n-1$ 中的一个)，使得 $x_1 = \cdots = x_k = y_1 = \cdots = y_p$，$y_{p+1} = \cdots = y_n = x_{k+1} = \cdots = x_m$，且 $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = \beta_1 + \cdots + \beta_p$ 时，(5.1)式中等式成立.

证明　不妨设 $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i = \sum_{i=1}^{n}\beta_i = 1$，下面分步证明.

(ⅰ)当 $x_k = x_{k+1}$ 时，$y_1 = y_2 = \cdots = y_n = \prod_{i=1}^{m} x_i^{\alpha_i}$，这时

$$\prod_{i=1}^{n} f^{\beta_i}(y_i) = f(y_1) = f\left(\prod_{i=1}^{m} x_i^{\alpha_i}\right) \leq \prod_{i=1}^{m} f^{\alpha_i}(x_i).$$

(ⅱ) 当 $x_k < x_{k+1}$ 时，由于 $x_k \leq y_1 \leq \prod_{i=1}^{n} y_i^{\beta_i} \leq y_n \leq x_{k+1}$，存在 $t_1, t_2 > 0$，且 $t_1 + t_2 = 1$，有

$$\prod_{i=1}^{n} y_i^{\beta_i} = x_k^{t_1} x_{k+1}^{t_2}, \tag{5.2}$$

同理，存在满足 $\lambda_i + \mu_i = 1$ 的 $\lambda_i \geq 0, \mu_i \geq 0 (i = 1,2\cdots,n)$，有

$$y_i = x_k^{\lambda_i} x_{k+1}^{\mu_i} (i = 1,2,\cdots,n), \tag{5.3}$$

(5.3)式代入(5.2)式，得

$$x_k^{t_1} x_{k+1}^{t_2} = x_k^{\sum_{i=1}^{n}\beta_i\lambda_i} x_{k+1}^{\sum_{i=1}^{n}\beta_i\mu_i},$$

由

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_i\lambda_i + \sum_{i=1}^{n}\beta_i\mu_i = \sum_{i=1}^{n}\beta_i(\lambda_i + \mu_i) = \sum_{i=1}^{n}\beta_i = 1,$$

$x_k < x_{k+1}$，$t_1, t_2 > 0$，且 $t_1 + t_2 = 1$，得 $t_1 = \sum_{i=1}^{n}\beta_i\lambda_i$，$t_2 = \sum_{i=1}^{n}\mu_i\lambda_i$.

另一方面，根据几何凸函数的定义，有

$$f(y_i) = f(x_k^{\lambda_i} x_{k+1}^{\mu_i}) \leq f^{\lambda_i}(x_k) f^{\mu_i}(x_{k+1}), (i = 1,2,\cdots,n)$$

$$\prod_{i=1}^{n} f^{\beta_i}(y_i) \leq \prod_{i=1}^{n} [f^{\lambda_i}(x_k) f^{\mu_i}(x_{k+1})]^{\beta_i}$$

$$= f^{\sum_{i=1}^{n}\beta_i\lambda_i}(x_k) f^{\sum_{i=1}^{n}\beta_i\mu_i}(x_{k+1}) = f^{t_1}(x_k) f^{t_2}(x_{k+1}), \tag{5.4}$$

此时知 $m=2$ 时命题已成立,令

$$u=\prod_{i=1}^{k}(x_i^{\alpha_i})^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{k}\alpha_i}},\quad \nu=\prod_{i=k+1}^{m}(x_i^{\alpha_i})^{\frac{1}{\sum_{i=k+1}^{m}\alpha_i}},$$

易知 $u\leq x_k<x_{k+1}\leq\nu$,所以

$$u^{\sum_{i=1}^{k}\alpha_i}\cdot\nu^{\sum_{i=k+1}^{m}\alpha_i}=\prod_{i=1}^{k}x_i^{\alpha_i}\cdot\prod_{i=1}^{n}y^{\beta_i}=x_k^{t_1}x_{k+1}^{t_2},$$

由于对于 $m=2$ 命题已证,所以有

$$f^{t_1}(x_k)f^{t_2}(x_{k+1})\leq f^{\sum_{i=1}^{k}\alpha_i}(\mu)\cdot f^{\sum_{i=k+1}^{m}\alpha_i}(\nu),\tag{5.5}$$

又

$$f(u)=f\Big[\prod_{i=1}^{k}(x_i^{\alpha_i})^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{k}\alpha_i}}\Big]\leq\Big[\prod_{i=1}^{k}f^{\alpha_i}(x_i)\Big]^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{k}\alpha_i}},$$

$$f(\nu)=f\Big[\prod_{i=k+1}^{m}(x_i^{\alpha_i})^{\frac{1}{\sum_{i=k+1}^{m}\alpha_i}}\Big]\leq\Big[\prod_{i=k+1}^{m}f^{\alpha_i}(x_i)\Big]^{\frac{1}{\sum_{i=k+1}^{m}\alpha_i}},$$

$$f^{\sum_{i=1}^{k}\alpha_i}(\mu)\cdot f^{\sum_{i=k+1}^{m}\alpha_i}(\nu)\leq\prod_{i=1}^{k}f^{\alpha_i}(x_i)\cdot\prod_{i=k+1}^{m}f^{\alpha_i}(x_i)=\prod_{i=1}^{m}f^{\alpha_i}(x_i),$$

再结合(5.4)式和(5.5)式,即知(5.1)式成立.等式成立的条件讨论从略.

推论 5.1 设 f 是区间 $M\subseteq R_{++}$ 上的几何凸函数,对任意的 $p,q,r>0$ 及 $x,y,z\in M$,有

$$f^p(x)\cdot f^q(y)\cdot f^r(z)\cdot f^{p+q+r}\big[(x^py^qz^r)^{\frac{1}{p+q+r}}\big]$$
$$\geq f^{p+q}\big[(x^py^q)^{\frac{1}{p+q}}\big]f^{q+r}\big[(y^qz^r)^{\frac{1}{q+r}}\big]f^{r+p}\big[(z^rx^p)^{\frac{1}{r+p}}\big].\tag{5.6}$$

证明 不妨设 $x\leq y\leq z$,显然有

$$x\leq(x^py^q)^{\frac{1}{p+q}}\leq(x^py^qz^r)^{\frac{1}{p+q+r}}\leq(y^qz^r)^{\frac{1}{q+r}}\leq z,$$

(i)若 $(x^pz^r)^{\frac{1}{p+r}}\leq y$,则

$$x\leq(x^pz^r)^{\frac{1}{p+r}}\leq(x^py^qz^r)^{\frac{1}{p+q+r}},$$

在定理 5.1 中令 $n=m=2$,知

$$f^p(x)f^{p+q+r}\big[(x^py^qz^r)^{\frac{1}{p+q+r}}\big]\geq f^{p+q}\big[(x^py^q)^{\frac{1}{p+q}}\big]f^{r+p}\big[(z^rx^p)^{\frac{1}{r+p}}\big],$$

又

$$f^q(y)f^r(z)\geq f^{q+r}\big[(y^qz^r)^{\frac{1}{q+r}}\big],$$

将上面两个式相乘即得证不等式(5.6).

(ii)若 $(x^pz^r)^{\frac{1}{p+r}}>y$,则

$$(x^p y^q z^r)^{\frac{1}{p+q+r}} \le (x^p z^r)^{\frac{1}{p+r}} \le z,$$

得

$$f^r(z) f^{p+q+r}[(x^p y^q z^r)^{\frac{1}{p+q+r}}] \ge f^{q+r}[(y^q z^r)^{\frac{1}{q+r}}] f^{r+p}[(z^r x^p)^{\frac{1}{r+p}}],$$

结合 $f^p(x) f^q(y) \ge f^{p+q}[(x^p y^q)^{\frac{1}{p+q}}]$，两不等式相乘即知不等式(5.6)也成立.

此结果显然推广了文[14]中的一个结果：

推论 5.2[14]　设 $y=f(t)$ 为 $I\subseteq R_{++}$ 上的几何凸函数，任取 $x,y,z\in I$，则有

$$f(x)f(y)f(z)f^3(\sqrt[3]{xyz}) \ge f^2(\sqrt{xy})f^2(\sqrt{yz})f^2(\sqrt{zx}).$$

在推论 5.1 中令 $p=q=r=1$ 即得推论 5.2，相应有：

推论 5.3　(ⅰ)设 f 是区间 $M\subseteq R_{++}$ 上的几何凹函数，对任意的 $p,q,r>0$，及 $x,y,z\in M$，有

$$f^p(x)\cdot f^q(y)\cdot f^r(z)\cdot f^{p+q+r}[(x^p y^q z^r)^{\frac{1}{p+q+r}}]$$
$$\le f^{p+q}[(x^p y^q)^{\frac{1}{p+q}}]\cdot f^{q+r}[(y^q z^r)^{\frac{1}{q+r}}]\cdot f^{r+p}[(z^r x^p)^{\frac{1}{r+p}}]$$

成立.

(ⅱ)设 $y=f(t)$ 为 $I\subseteq R_{++}$ 上的几何凹函数，任取 $x,y,z\in I$，则有

$$f(x)f(y)f(z)f^3(\sqrt[3]{xyz}) \le f^2(\sqrt{xy})f^2(\sqrt{yz})f^2(\sqrt{zx}).$$

对定理 5.1 和定理 5.2 中作函数变换，令 $f(x)=e^{g(\ln x)}$，再对所有的量 x_i, y_i 分别用 e^{x_i}, e^{y_i} 替代，则可得：

推论 5.4　设 f 为区间 M 上的凸函数，若

(ⅰ) $\alpha_i>0, x_i\in M, i=1,2,\cdots,m, m>1$；

(ⅱ) $\beta_i>0, y_i\in M, i=1,2,\cdots,n, n>1$；

(ⅲ) $x_1\le\cdots\le x_k\le y_1\le\cdots\le y_n\le x_{k+1}\le\cdots\le x_m$，且 $1\le k\le m-1$；

(ⅳ) $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=\sum_{i=1}^{n}\beta_i, \sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i=\sum_{i=1}^{n}\beta_i y_i$；

则有

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f(x_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n}\beta_i f(y_i)$$

成立，而对 f 为区间 M 上的凹函数，上式中的不等式要反向.

推论 5.5　设 f 为区间 M 上的凸函数，如果对任意的 $p,q,r>0$，及 $x,y,z\in M$，有

$$pf(x)+qf(y)+rf(z)+(p+q+r)f\left(\frac{px+qy+rz}{p+q+r}\right)$$

$$\geq (p+q)f\left(\frac{px+qy}{p+q}\right)+(q+r)f\left(\frac{qy+rz}{q+r}\right)+(p+r)f\left(\frac{px+rz}{p+r}\right).$$

定理 5.2 设 $\varphi(x)$是定义在 $I\subseteq R_{++}$上的几何凸函数,且对 $x_i\in I,t_i>0,i=1,2,\cdots,n\cdots$,记 $B_n=\phi^{T_n}[(\prod_{i=1}^{n}x_i^{t_i})^{\frac{1}{T_n}}]$,其中设 $T_n=\sum_{i=1}^{n}t_i$,则 $F(n)=\dfrac{\prod_{i=1}^{n}\phi^{t_i}(x_i)}{B_n}$为 n 的增函数.

证明 根据几何凸函数的性质,

$$\phi^{t_{n+1}}(x_{n+1})\cdot\phi^{\sum_{i=1}^{n}t_i}\left[\left(\prod_{i=1}^{n}x_i^{t_i}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}t_i}}\right]\geq$$

$$\phi^{\sum_{i=1}^{n+1}t_i}\left\{\left[\left(\prod_{i=1}^{n}x_i^{t_i}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}t_i}\cdot\sum_{i=1}^{n}t_i}\cdot x_{n+1}^{t_{n+1}}\right]^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n+1}t_i}}\right\}=\phi^{\sum_{i=1}^{n+1}t_i}\left[\left(\prod_{i=1}^{n+1}x_i^{t_i}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n+1}t_i}}\right],$$

$$\frac{F(n+1)}{F(n)}=\phi^{t_{n+1}}(x_{n+1})\cdot\phi^{\sum_{i=1}^{n}t_i}\left[\left(\prod_{i=1}^{n}x_i^{t_i}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}t_i}}\right]$$

$$\cdot\left\{\phi^{\sum_{i=1}^{n+1}t_i}\left[\left(\prod_{i=1}^{n+1}x_i^{t_i}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n+1}t_i}}\right]\right\}^{-1}\geq 1,$$

因此 $F(n)=\dfrac{\prod_{i=1}^{n}\phi^{t_i}(x_i)}{B_n}$为 n 的增函数.

文[18]、[14]和[21]从一维几何凸函数性质出发,分别得到了一个控制不等式和一个排序不等式,我们将在后面 n 维几何凸函数里作为推论介绍,但必须在这里说明一下.

练习(李世杰先生提供)

1. 讨论函数 $f(x)=-x^2-x+2$ 的几何凸性.
2. 讨论函数 $f(x)=x^3-3x^2+4x-4$ 的几何凸性.

(提示:先对 f 因式分解,然后各自讨论)

3. 设 n 次多项式函数

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n,(a_n\neq 0)$$

是区间$(0,a)$上的几何凸函数，求证：$a_0>0,a_1\geq 0$.

4. 设 $a>0$，n 次多项式函数

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n,(a_n\neq 0)$$

是区间$[a,+\infty)$上的几何凹函数，求证：$a_n>0,a_{n-1}\leq 0$.

5. 设 $f(x)$是$(a,b)\subseteq R_{++}$上的几何凸函数，$c,d,\beta\in R_{++}$，

求证：$F(x)=cx^{\alpha}f^{\beta}(dx^{\gamma})$是$((\frac{a}{d})^{\frac{1}{\gamma}},(\frac{b}{d})^{\frac{1}{\gamma}})$上的几何凸函数.

6. 设 $a_0\neq 0,a_4\neq 0$，

$$f(x)=a_0x^s+a_1x^t+a_2x^m+a_3x^n+a_4x^p,$$

其中 $p,n,m,t,s\in N,p>n>m>t>s\geq 0$，且 f 为区间$(0,+\infty)$上的几何凸函数，求证：$a_4>0,a_3\geq 0,a_1\geq 0,a_0>0$.

第四章　N 维几何凸函数

本章将把几何凸(凹)函数的定义拓广到 n 维空间,使其应用更广泛.

设 R^n,R_+^n,R_{++}^n 分别是 n 维实行向量、n 维分量是非负的实行向量和 n 维分量是正的实行向量,对于 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$,$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in R^n$,$a>0$,定义 $R^n\to R^n$ 的映射 $e^x=(e^{x_1},e^{x_2},\cdots,e^{x_n})$;对于 $x\in R_+^n$,定义 $x^a=(x_1^a,x_2^a,\cdots,x_n^a)$;对于 $x\in R_{++}^n$,定义 $\ln x=(\ln x_1,\ln x_2,\cdots,\ln x_n)$;又定义 $R^n\times R^n\to R^n$ 的映射 $x\cdot y=(x_1y_1,x_2y_2,\cdots,x_ny_n)$. 以下都设 α 和 β 是满足 $\alpha>0,\beta>0,\alpha+\beta=1$ 的任何实数,不再复述.

第一节　几何凸集

高维几何凸函数须在几何凸集上定义,这一节将介绍几何凸集的定义和性质.

定义 1.1　设 $E\subseteq R_{++}^n$,称 E 为几何凸集,如果任取其中的两点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$和 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$都有 $x^\alpha y^\beta\in E$.

设 $E\subseteq R_{++}^n$,$\ln E=\{\ln x\mid x\in E\}$,则有以下定理.

定理 1.1　设 $E\subseteq R_{++}^n$,则 E 为几何凸集的充分必要条件为:$\ln E$ 是 R^n 的凸集.

证明　充分性容易证明. 下证必要性:任取 $u,v\in\ln E$,设 $u=\ln x$,$v=\ln y$,其中 $x,y\in E$,$\alpha u+\beta v=\ln(x^\alpha y^\beta)$,因 $E\subseteq R_+^n$ 为几何凸集,所以

$$x^\alpha y^\beta\in E,\alpha u+\beta v=\ln(x^\alpha y^\beta)\in\ln E.$$

推论 1.1　设 $E\subseteq R_{++}^n$ 为闭集,则 E 为几何凸集的充分必要条件为:任取 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in E$,$y=(y_1,y_2\cdots,y_n)\in E$,都有 $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\in E$.

这由定理 1.1 和凸集的性质可推得.

定义 1.2　设 $A(x_1,x_2,\cdots,x_n),B(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in R_{++}^n$ 点 $C(\sqrt{x_1y_1},$

$\sqrt{x_2y_2},\cdots,\sqrt{x_ny_n}$)称为 A 与 B 的几何中点.

推论 1.1[*]　设 $E\subseteq R^n_{++}$ 为闭集,则 E 为几何凸集的充分必要条件为任取 E 中两点,它们的几何中点也在 E 中.

定理 1.2　(ⅰ)R^n_{++} 中的几何凸集在 R^n_{++} 中的闭包为几何凸集.

(ⅱ)有限个或无限个几何凸集的交也为几何凸集.

证明　(ⅰ)设 $E\subseteq R^n_{++}$ 为几何凸集,下证 E 在 R^n_{++} 中的闭包 $\overline{E}$ 为几何凸集.

任取两点 $x,y\in\overline{E}$,先证 $x,y\notin E$ 的情形,则存在 E 中的点列 $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{+\infty}$ 和 $\{y^{(n)}\}_{n=1}^{+\infty}$,当 $n\to+\infty$ 时,有 $x^{(n)}\to x$,$y^{(n)}\to y$ 和 $\sqrt{x^{(n)}y^{(n)}}\to\sqrt{xy}$,由于 E 为几何凸集,故 $\sqrt{x^{(n)}y^{(n)}}\in E$,所以 $\sqrt{xy}\in\overline{E}$,则根据推论 1.1 知 $\overline{E}$ 为几何凸集.对于 $x,y\in\overline{E}$ 的其余情形,为同理证明,在此从略.

(ⅱ)利用交集的定义即得.

定义 1.3　设 $A(x_1,x_2,\cdots,x_n),B(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in R^n_{++}$ 那么所有包含 A、B 的几何凸集的交集,称为包含 A、B 的最小几何凸集.

定理 1.3　设 $E\subseteq R^n_{++}$,则 E 为几何凸集的充分必要条件为:任取 $(x_1,x_2,\cdots,x_n),(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in E$,有

$$\{(z_1,z_2,\cdots,z_n)\mid \frac{\ln z_1-\ln x_1}{\ln y_1-\ln x_1}=\frac{\ln z_2-\ln x_2}{\ln y_2-\ln x_2}=\cdots=\frac{\ln z_n-\ln x_n}{\ln y_n-\ln x_n};$$

$$\min(x_i,y_i)\le z_i\le\max(x_i,y_i),i=1,2,\cdots,n\}\subseteq E.$$

证明　必要性:因

$$\min(x_i,y_i)\le z_i\le\max(x_i,y_i),i=1,2,\cdots,n,$$

令

$$\alpha=\frac{\ln z_1-\ln x_1}{\ln y_1-\ln x_1}=\frac{\ln z_2-\ln x_2}{\ln y_2-\ln x_2}=\cdots=\frac{\ln z_n-\ln x_n}{\ln y_n-\ln x_n}\ge 0,\tag{1.1}$$

则有

$$1-\alpha=\frac{\ln y_1-\ln z_1}{\ln y_1-\ln x_1}=\frac{\ln y_2-\ln z_2}{\ln y_2-\ln x_2}=\cdots=\frac{\ln y_n-\ln z_n}{\ln y_n-\ln x_n}\ge 0,$$

由(1.1)知

$$\alpha\ln\frac{y_i}{x_i}=\ln\frac{z_i}{x_i},i=1,2,\cdots,n,$$

$$\left(\frac{y_i}{x_i}\right)^\alpha=\frac{z_i}{x_i},i=1,2,\cdots,n,$$

$$z_i=x_i^{1-\alpha}y_i^\alpha,i=1,2,\cdots,n,$$

$$(z_1,z_2,\cdots,z_n)=(x_1^{1-\alpha}y_1^\alpha,x_2^{1-\alpha}y_2^\alpha,\cdots,x_n^{1-\alpha}y_n^\alpha)$$
$$=x^{1-\alpha}y^\alpha\in E.$$

必要性得证;至于充分性只要将以上步骤逆推一下即可.

由定理1.3即得下面的推论.

推论1.2 设 $A(x_1,x_2,\cdots,x_n),B(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in R_{++}^n$,则 E 是包含 A、B 的最小几何凸集的充分必要条件为:

$$E=\{(z_1,z_2,\cdots,z_n)\mid\frac{\ln z_1-\ln x_1}{\ln y_1-\ln x_1}=\cdots=\frac{\ln z_n-\ln x_n}{\ln y_n-\ln x_n};$$
$$\min(x_i,y_i)\le z_i\le\max(x_i,y_i),i=1,2,\cdots,n\}.$$

推论1.3 设 $A(x_1,x_2,\cdots,x_n),B(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in R_{++}^n$,$E$ 是包含 A、B 的最小几何凸集,且点 $C(z_1,z_2,\cdots,z_n)\in E$,$F$ 是包含 A、C 的最小几何凸集,则 $F\subseteq E$.

证明 由推论1.1知,$\ln E=\{\ln x\mid x\in E\}$ 为一线段,$(\ln x_1,\ln x_2,\cdots,\ln x_n)$ 和 $(\ln y_1,\ln y_2,\cdots,\ln y_n)$ 是其两端点,$(\ln z_1,\ln z_2,\cdots,\ln z_n)$ 是其上一点,故 $F\subseteq E$.

例1 在平面直角坐标系内的两点 $A(1,2)$ 和 $B(5,3)$,求包含 A、B 的最小几何凸集 E.

解 根据定理1.2,有

$$E=\{(z_1,z_2)\mid\frac{\ln z_1-\ln 1}{\ln 5-\ln 1}=\frac{\ln z_2-\ln 2}{\ln 3-\ln 2},1\le z_1\le 5,2\le z_2\le 3\},$$

$$E=\{(z_1,z_2)\mid\ln z_2-\ln 2=\frac{\ln\frac{3}{2}}{\ln 5}\ln z_1,1\le z_1\le 5\},$$

$$E=\{(z_1,z_2)\mid z_2=2z_1^{\log_5\frac{3}{2}},1\le z_1\le 5\}.$$

从上例可以看出,经过 A、B 两点的直线不为几何凸集,所以凸集不一定为几何凸集,几何凸集也不一定为凸集.

定理1.4 在平面直角坐标系的第一象限内的有两点 $A(x_1,y_1)$ 和 B

(x_2, y_2)，包含 A、B 的最小几何凸集是 E，则

（ⅰ）当 $x_1 = x_2$ 或 $y_1 = y_2$ 或 $x_1 y_2 = x_2 y_1$ 时，E 即为线段 AB.

（ⅱ）当 $x_1 \neq x_2$ 且 $y_1 \neq y_2$，且 $\frac{\ln y_2 - \ln x_2}{\ln y_1 - \ln x_1} > 1$ 时，E 所对应的函数是凸函数.

（ⅲ）当 $x_1 \neq x_2$ 且 $y_1 \neq y_2$，且 $\frac{\ln y_2 - \ln x_2}{\ln y_1 - \ln x_1} < 1$ 时，E 所对应的函数是凹函数.

证明 （ⅰ）从定理 1.2 或例 1.1 的解答过程中，可以得到此结论.

（ⅱ）其实此时有

$$E = \{(z_1, z_2,) \mid z_2 = y_2\left(\frac{z_1}{x_1}\right)^{\frac{\ln y_2 - \ln x_2}{\ln y_1 - \ln x_1}},$$
$$\min(x_1, x_2) \leq z_1 \leq \max(x_1, x_2)\},$$

曲线 E 中，$z_2''(z_1) > 0$，E 为所对应的函数是凸函数.

（ⅲ）与（ⅱ）类似可证.

下面给出几个 R^n_{++} 中常见的几何凸集.

定理 1.5 R^n_{++} 的子集

$$E = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^t \leq r, t \in R, r > 0, x_i > 0, i = 1,2,\cdots,n\}$$

为几何凸集.

证明 任取 $x, y, \in E$，有

$$x^\alpha y^\beta = (x_1^\alpha y_1^\beta, x_2^\alpha y_2^\beta, \cdots, x_n^\alpha y_n^\beta),$$

$$\begin{aligned}(x_1^\alpha y_1^\beta)^t + (x_2^\alpha y_2^\beta)^t + \cdots + (x_n^\alpha y_n^\beta)^t &= (x_1^t)^\alpha (y_1^t)^\beta + (x_2^t)^\alpha (y_2^t)^\beta + \cdots + (x_n^t)^\alpha (y_n^t)^\beta \\ &\overset{*}{\leq} (x_1^t + x_2^t + \cdots + x_n^t)^\alpha \cdot (y_1^t + y_2^t + \cdots + y_n^t)^\beta \\ &\leq r^{\alpha+\beta} = r,\end{aligned}$$

其中上面（ * ）式是 ***Hölder*** 不等式推出，所以 $x^\alpha y^\beta \in E$，故 E 为几何凸集.

推论 1.4 （ⅰ）R^n_{++} 的子集

$$E = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq r^2, \text{其中 } r > 0, x_i > 0, i = 1,2,\cdots,n\}$$

为几何凸集.

(ⅱ) R^n_{++} 的子集

$$E = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid \sum_{i=1}^{n} x_i \leq r; r > 0, x_i > 0, i = 1,2,\cdots,n\}$$

为几何凸集.

这是定理 1.5 的 $t=1,2$ 的情形.

引理 1.1 设 $H \subseteq R^n_{++}$, $E \subseteq R^m_{++}$ 为几何凸集,则为 $H \times E = \{(x,y) \mid x \in H, y \in E\}$ 为 R^{n+m}_{++} 中的几何凸集.

证明 任取 $a, b \in H \times E$,设

$$a = (x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m),$$
$$b = (z_1, z_2, \cdots, z_n, w_1, w_2, \cdots, w_m),$$

其中

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in H, (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in H,$$
$$(w_1, w_2, \cdots, w_m) \in E, (y_1, y_2, \cdots, y_m) \in E,$$

则

$$a^\alpha b^\beta = (x_1^\alpha, \cdots, x_n^\alpha, y_1^\alpha, \cdots, y_m^\alpha)(z_1^\beta, \cdots, z_n^\beta, w_1^\beta, \cdots, w_m^\beta),$$
$$a^\alpha b^\beta = (x_1^\alpha z_1^\beta, \cdots, x_n^\alpha z_n^\beta, y_1^\alpha w_1^\beta, \cdots, y_m^\alpha w_m^\beta),$$

因为 H 和 E 为几何凸集,故

$$(x_1^\alpha z_1^\beta, \cdots, x_n^\alpha z_n^\beta) \in H, (y_1^\alpha w_1^\beta, \cdots, y_m^\alpha w_m^\beta) \in E,$$

所以 $a^\alpha b^\beta = (x_1^\alpha z_1^\beta, \cdots, x_n^\alpha z_n^\beta, y_1^\alpha w_1^\beta, \cdots, y_m^\alpha w_m^\beta) \in H \times E$,故 E 为几何凸集.

定理 1.6 (ⅰ)设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 都是正,则 R^n_{++} 的子集

$$E = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1,2,\cdots,n\},$$
$$F = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid a_i < x_i \leq b_i, i = 1,2,\cdots,n\},$$
$$H = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid a_i \leq x_i < b_i, i = 1,2,\cdots,n\}, \tag{1.2}$$
$$M = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid a_i < x_i < b_i, i = 1,2,\cdots,n\}, \tag{1.3}$$

都为几何凸集,其中(1.2)式和(1.3)式中的某些或全体 b_i 可为无穷,命题也成立.

(ⅱ) R^n_{++} 的子集

$$E = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid \prod_{i=1}^{n} x_i \leq r, \text{其中 } r > 0, x_i > 0, i = 1,2,\cdots,n\}$$

为几何凸集.

证明 (ⅰ)在数轴上,$E_i = \{x_i \mid a_i \leq x_i \leq b_i\}$, $i = 1,2,\cdots,n$,显然为几何凸集,根据定理 1.4, $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = E$ 为几何凸集.

(ⅱ)任取 $x,y\in E$,有 $x^{\alpha}y^{\beta}=\{x_1^{\alpha}y_1^{\beta},x_2^{\alpha}y_2^{\beta},\cdots,x_n^{\alpha}y_n^{\beta}\}$,

因

$$\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}y_i^{\beta}=(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{\alpha}(\prod_{i=1}^{n}y_i)^{\beta}\leq r^{\alpha}r^{\beta}=r.$$

所以 E 为几何凸集.

定理 1.7　设 S 为一个正常数,则

$$E=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid\prod_{i=1}^{n}x_i=s,x_i>0,i=1,2,\cdots,n\}$$

为几何凸集.

定理 1.8　设 $E\subseteq R_{++}^{n}$,$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in R_{++}^{n}$,则

$$H=\{(a_1x_1,a_2x_2,\cdots,a_nx_n)\mid x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in E\}$$

为几何凸集当且仅当 E 为几何凸集.

利用几何凸集的定义容易证明定理 1.7 和定理 1.8.

第二节　圆是否为几何凸集的讨论

推论 1.4 的结论令人不满意,有没有更强的结果呢? 自然地想到,在 R_{++}^{n} 的超球是否为几何凸集? 当然先在 2 维空间中考虑,即在平面直角坐标系的第一象限内的圆是否为几何凸集? 本节涉及的圆和半圆指的是圆面和半圆面,不是指通常意义上的圆周和半圆周.

设圆 O 方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2\leq r^2$,为了保证圆在第一象限内,再设 $a>r>0,b>r>0$,在圆内任取两点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,那么几何中点 $C(\sqrt{x_1x_2},\sqrt{y_1y_2})$ 在不在圆内? 若 C 在圆外,则圆 O 不为几何凸集,否则圆 O 为几何凸集.此时可设 $A(a+r_1\cos\theta_1,b+r_1\sin\theta_1)$ 和 $B(a+r_2\cos\theta_2,b+r_2\sin\theta_2)$,且 $0<r_1,r_2\leq r$,要考虑

$$C(\sqrt{(a+r_1\cos\theta_1)(a+r_2\cos\theta_2)},\sqrt{(b+r_1\sin\theta_1)(b+r_2\sin\theta_2)})$$

在不在圆内,即问在 $a>r>0,b>r>0$ 条件下,

$$[\sqrt{(a+r_1\cos\theta_1)(a+r_2\cos\theta_2)}-a]^2+[\sqrt{(b+r_1\sin\theta_1)(b+r_2\sin\theta_2)}-b]^2\leq r^2 \tag{2.1}$$

是否成立,将 $\frac{a}{r}$ 和 $\frac{b}{r}$ 分别用 a 和 b 代替,$\frac{r_1}{r}$ 和 $\frac{r_2}{r}$ 分别用 r_1 和 r_2 代替,则(2.1)式化为

$$[\sqrt{(a+r_1\cos\theta_1)(a+r_2\cos\theta_2)}-a]^2$$
$$+[\sqrt{(b+r_1\sin\theta_1)(b+r_2\sin\theta_2)}-b]^2\leq 1, \tag{2.2}$$

其中 $a>1,b>1,r_1\leq 1,r_2\leq 1$,依定理 1.4 的(ⅱ)和(ⅲ),凭感觉圆是够“凸”的,所以作者开始猜想(2.2)是成立的,即猜想圆为几何凸集,并在中国不等式研究小组网站(*http://zgbdsyjxz.nease.net/*)的问题预选栏中,提了两个公开问题:

问题 1: 设 θ_1,θ_2 为两个角,是否恒有

$$[(\sqrt{(\cos\theta_1+1)(\cos\theta_2+1)}-1]^2+[\sqrt{(\sin\theta_1+1)(\sin\theta_2+1)}-1]^2\leq 1$$

成立.

问题 2: 设 θ_1,θ_2 为两个角,$a,b>1$,是否恒有

$$[(\sqrt{(\cos\theta_1+a)(\cos\theta_2+a)}-a]^2+\sqrt{(\sin\theta_1+b)(\sin\theta_2+b)}-b]^2\leq 1$$

成立.

江苏徐州师范大学数学系的张晗方博士,证明了以下结论:

定理 2.1 设 $a>r>0,b>r>0$,四分之一圆

$$E=\{(x,y)\mid (x-a)^2+(y-b)^2\leq r^2,x\geq a,y\geq b\},$$

则 E 为几何凸集.

证明 根据上面分析,只要证当 $0\leq\theta_1\leq\frac{\pi}{2},0\leq\theta_2\leq\frac{\pi}{2}$ 时,

$$[(\sqrt{(a+r_1\cos\theta_1)(a+r_2\cos\theta_2)}-a]^2$$
$$+[\sqrt{(b+r_1\sin\theta_1)(b+r_2\sin\theta_2)}-b]^2\leq 1^2,$$

成立即可.因

$$\sqrt{(a+r_1\cos\theta_1)(a+r_2\cos\theta_2)}-a\geq 0,$$
$$\sqrt{(b+r_1\sin\theta_1)(b+r_2\sin\theta_2)}-b\geq 0,$$

所以有

$$[(\sqrt{(r_1\cos\theta_1+a)(r_2\cos\theta_2+a)}-a]^2$$
$$+[\sqrt{(r_1\sin\theta_1+b)(r_2\sin\theta_2+b)}-b]^2$$
$$\leq\left[\frac{(r_1\cos\theta_1+a)+(r_2\cos\theta_2+a)}{2}-a\right]^2$$
$$+\left[\frac{(r_1\sin\theta_1+b)+(r_2\sin\theta_2+b)}{2}-b\right]^2$$

$$= \left(\frac{r_1\cos\theta_1 + r_2\cos\theta_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{r_1\sin\theta_1 + r_2\sin\theta_2}{2}\right)^2$$

$$\leq \left(\frac{\cos\theta_1 + \cos\theta_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sin\theta_1 + \sin\theta_2}{2}\right)^2$$

$$\leq \frac{\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2}{2} + \frac{\sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_2}{2} = 1,$$

故 E 为几何凸集.

对于其它情况如何呢？西藏的刘保乾先生请教我国数学家、数学软件 BOTTEMA 研发者、成都科学院研究员杨路研究员和他的博士研究生夏时洪先生，他们凭借过硬的数学分析能力和 *BOTTEMA* 软件，找出问题 1 和 2 的反例. 这里只略介绍过程，要知详情，请参看文献[6]和[7].

问题 1 的反例：

设 $0\leq\theta_1<2\pi, 0\leq\theta_2<2\pi, u=\tan\frac{\theta_1}{2}, \nu=\tan\frac{\theta_2}{2}$，由万能公式有：$\cos\theta_1 = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \sin\theta_1 = \frac{2-u}{1+u^2}, \cos\theta_2 = \frac{1-\nu^2}{1+\nu^2}, \sin\theta_2 = \frac{2\nu}{1+\nu^2}$，虽然 u 与 $\tan\frac{\theta_1}{2}$，ν 与 $\tan\frac{\theta_2}{2}$，之间的变换不是一一对应，但不难发现数组 $(\cos\theta_1, \sin\theta_1)$ 与 $-\infty<u<+\infty$ 之间的变换、数组 $(\cos\theta_2, \sin\theta_2)$ 与 $-\infty<\nu<+\infty$ 之间的变换是一一对应的，此时问题 1 化为：

$$\left(\sqrt{\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}+1\right)\left(\frac{1-\nu^2}{1+\nu^2}+1\right)}-1\right)^2 + \left(\sqrt{\left(\frac{2u}{1+u^2}+1\right)\left(\frac{2\nu}{1+\nu^2}+1\right)}-1\right)^2 \leq 1,$$

再用 BOTTEMA 软件搜索边界上和内部的奇点，发现共有 6 个，又一一验证，找出了反例：$u=8, \nu=1$，从而否定了问题 1.

问题 2 的反例： 同样也得到了反例：

$$a = b = \frac{5285413}{5285412}, u = 111, \nu = \frac{1}{5},$$

其中相应有 $\cos\theta_1 = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \sin\theta_1 = \frac{2u}{1+u^2}, \cos\theta_2 = \frac{1-\nu^2}{1+\nu^2}, \sin\theta_2 = \frac{2\nu}{1+\nu^2}$.

杨路老师还给出了问题 2 的一个有条件解答，笔者把其整理为下面定理.

定理 2.2 设 $a\geq\frac{4\sqrt{6}}{9}r>0$ 且 $b\geq\frac{4\sqrt{6}}{9}r>0$，则半圆 $\{(x,y)\mid(x-a)^2+$

$(y-b)^2\le r^2, y\ge b\}$为几何凸集，且分别对于 a、b，系数$\frac{4\sqrt{6}}{9}$为最小的.

证明 先证半圆为几何凸集，任取两点 $A(a+r_1\cos\theta_1, b+r_1\sin\theta_1)$和 $B(a+r_2\cos\theta_2, b+r_2\sin\theta_2)$，其中 $0\le\theta_1, \theta_2\le\pi$，下面只要证

$$C(\sqrt{(a+r_1\cos\theta_1)(a+r_2\cos\theta_2)}, \sqrt{(b+r_1\sin\theta_1)(b+r_2\sin\theta_2)})$$

在圆内，将$\frac{a}{r}$和$\frac{b}{r}$分别用a 和b 代替，$\frac{r_1}{r}$和$\frac{r_2}{r}$分别用r_1 和 r_2 代替，此时有 $a\ge\frac{4\sqrt{6}}{9}$和 $b\ge\frac{4\sqrt{6}}{9}$，$0<r_1, r_2\le1$，因而只要证

$$[(\sqrt{(a+r_1\cos\theta_1)(a+r_2\cos\theta_2)}-a]^2 + [\sqrt{(b+r_1\sin\theta_1)(b+r_2\sin\theta_2)}-b]^2\le 1. \qquad (2.3)$$

(i)当 $0\le\theta_1, \theta_2\le\frac{\pi}{2}$时，要证

$$[(\sqrt{(a+\cos\theta_1)(a+\cos\theta_2)}-a]^2 + [\sqrt{(b+\sin\theta_1)(b+\sin\theta_2)}-b]^2\le 1,$$

设 $u=\tan\frac{\theta_1}{2}$，$\nu=\tan\frac{\theta_2}{2}$，只要证对 $0\le u, \nu\le1$，有

$$(\sqrt{(\frac{1-u^2}{1+u^2}+a)(\frac{1-\nu^2}{1+\nu^2}+a)}-a)^2 + (\sqrt{(\frac{2u}{1+u^2}+b)(\frac{2\nu}{1+\nu^2}+b)}-b)^2\le 1 \qquad (2.4)$$

成立，即只要证下面两式成立即可，

$$(\sqrt{(\frac{2u}{1+u^2}+b)(\frac{2\nu}{1+\nu^2}+b)}-b)^2\le\frac{(u+\nu)^2(u\nu+1)^2}{(1+u^2)^2(1+\nu^2)^2} \qquad (2.5)$$

$$(\sqrt{(\frac{1-u^2}{1+u^2}+a)(\frac{1-\nu^2}{1+\nu^2}+a)}-a)^2 \le 1-\frac{(u+\nu)^2(u\nu+1)^2}{(1+u^2)^2(1+\nu^2)^2} \qquad (2.6)$$

而对于(2.5)和(2.6)式，在 $a\ge\frac{4\sqrt{6}}{9}$和 $b\ge\frac{4\sqrt{6}}{9}$的条件下，用 BOTTEMA 容易验证.

(ⅱ)当$\frac{\pi}{2}\le\theta_1,\theta_2<\pi$时,设$\omega_i=\pi-\theta_i,i=1,2$则,$0<\omega_1,\omega_2\le\frac{\pi}{2}$,(2.2)式化为

$$[a-\sqrt{(a-r_1\cos\omega_1)(a-r_1\cos\omega_2)}]^2 + [\sqrt{(b+r_2\sin\omega_1)(b+r_2\sin\omega_2)}-b]^2\le 1 \quad (2.7)$$

只要证

$$\begin{aligned}&[a-(\sqrt{(a-\cos\omega_1)(a-\cos\omega_2)}]^2\\&\quad+[\sqrt{(b+\sin\omega_1)(b+\sin\omega_2)}-b]^2\le 1,\\&\Leftrightarrow[(\sqrt{(a+\cos\theta_1)(a+\cos\theta_2)}-a]^2\\&\quad+[\sqrt{(b+\sin\theta_1)(b+\sin\theta_2)}-b]^2\le 1,\end{aligned} \quad (2.8)$$

设$u=\tan\frac{\theta_1}{2},\nu=\tan\frac{\theta_2}{2}$只要证对$1\le u,\nu$时,(2.4),(2.5)和(2.6)式成立,在$a\ge\frac{4\sqrt{6}}{9}$和$b\ge\frac{4\sqrt{6}}{9}$条件下,用 BOTTEMA 容易验证.

(ⅲ)当θ_1,θ_2中一个小于或等于$\frac{\pi}{2}$,另一个大于$\frac{\pi}{2}$但小于π时,类似上面(ⅱ)的讨论,在此从略.

(ⅳ)对于θ_1,θ_2二者中有角为π,由于连续性,不难知道(2.3)式也成立.

再证系数是最小的.根据以上分析,只要考虑(2.4)式对任何非负数u和ν成立即可.又

$$\begin{aligned}&\lim_{b\to+\infty}\left(\sqrt{(\frac{2u}{1+u^2}+b)(\frac{2\nu}{1+\nu^2}+b)}-b\right)^2\\&=\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{(\frac{2u}{1+u^2}+b)(\frac{2\nu}{1+\nu^2}+b)-b^2}{(\sqrt{(\frac{2u}{1+u^2}+b)(\frac{2\nu}{1+\nu^2}+b)}+b}\right]^2\\&=\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{\frac{2u}{1+u^2}\frac{2\nu}{1+\nu^2}+(\frac{2u}{1+u^2}+\frac{2\nu}{1+\nu^2})b}{(\sqrt{(\frac{2u}{1+u^2}+b)(\frac{2\nu}{1+\nu^2}+b)}+b}\right]^2\\&=\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{\frac{4u\nu}{b(1+u^2)(1+\nu^2)}+(\frac{2u}{1+u^2}+\frac{2\nu}{1+\nu^2})}{\sqrt{(\frac{2u}{b(1+u^2)}+1)(\frac{2\nu}{b(1+\nu^2)}+1)}+1}\right]^2\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\frac{2u}{1+u^2}+\frac{2\nu}{1+\nu^2}}{2}\right)^2$$

$$= \left[\frac{u+\nu+u^2\nu+u\nu^2}{(1+u^2)(1+\nu^2)}\right]^2$$

$$= \frac{(u+\nu)^2(u\nu+1)^2}{(1+u^2)^2(1+\nu^2)^2}.$$

所以对于 a 来说,只要使

$$\left(\sqrt{\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}+a\right)\left(\frac{1-\nu^2}{1+\nu^2}+a\right)}-a\right)^2$$

$$+\frac{(u+v)^2(uv+1)^2}{(1+u^2)^2(1+v^2)^2}\leq 1 \tag{2.9}$$

成立即可,用 BOTTEMA 软件可证(2.9)式成立当且仅当 $a\geq\frac{4\sqrt{6}}{9}r$,$b$ 的范围可同样讨论.

杨路研究员借助他的计算机,还给出了以下定理.

定理 2.3 当 $a\geq\frac{\sqrt{66+6\sqrt{13}}}{9}r$ 时,则半圆

$$\{(x,y)\mid(x-a)^2+(y-a)^2\leq r^2,y\geq a\}$$

为几何凸集,且系数$\frac{\sqrt{66+6\sqrt{13}}}{9}$是最小的.

为了得到一个整圆为几何凸集的充分条件,下面介绍三个引理,其中至关重要的引理 2.3 是杨路研究员给出的.

引理 2.1 设 $a\geq|b|,a\geq|c|$,则有

$$[\sqrt{(a+b)(a+c)}-a]^2\leq[a-\sqrt{(a-|b|)(a-|c|)}]^2. \tag{2.10}$$

证明 当 b,c 同时小于零时,(2.10)式左右边相等,下证 b,c 不同时小于零的情形.要证

$$-[\sqrt{(a+b)(a+c)}-a]^2+[a-\sqrt{(a-|b|)(a-|c|)}]^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow[\sqrt{(a+b)(a+c)}-\sqrt{(a-|b|)(a-|c|)}]$$

$$\times[a-\sqrt{(a+b)(a+c)}+a-\sqrt{(a-|b|)(a-|c|)}]\geq 0,$$

$[\sqrt{(a+b)(a+c)}-\sqrt{(a-|b|)(a-|c|)}]$明显非负,所以只要证

$$a-\sqrt{(a+b)(a+c)}+a-\sqrt{(a-|b|)(a-|c|)}\geq 0,$$

移项平方后,有

$$4a^2 \geq 2a^2 + ab + ac + bc - a|b| - a|c|$$
$$+|bc| + 2\sqrt{(a+b)(a+c)}\sqrt{(a-|b|)(a-|c|)},$$
$$\Leftrightarrow 2a^2 \geq ab + ac + bc - a|b| - a|c| + |bc|$$
$$+ 2\sqrt{(a+b)(a+c)}\sqrt{(a-|b|)(a-|c|)}, \tag{2.11}$$

当 b,c 为同时非负时,化为

$$a^2 - bc \geq \sqrt{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},$$
$$a^4 - 2a^2bc + b^2c^2 \geq a^4 - a^2(b^2+c^2) + b^2c^2,$$

上式显然成立.

当 b,c 一个为非负时,一个为负时,不妨设 c 为负,则(2.11)式化为

$$a^2 + a|c| \geq \sqrt{(a^2-b^2)(a-|c|)^2}$$
$$\Leftarrow a^2 + a|c| \geq \sqrt{a^2(a-|c|)^2}$$
$$\Leftarrow a + |c| \geq \sqrt{(a-|c|)^2}.$$

上式显然成立.

引理 2.2　设 $a \geq b \geq 0, a \geq c \geq 0$,则函数

$$f(a) = a - \sqrt{(a-b)(a-c)}$$

为减函数.

证明　因

$$f'(a) = 1 - \frac{2a-b-c}{2\sqrt{(a-b)(a-c)}} \leq 0$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(a-b)(a-c)} \leq (a-b) + (a-c),$$

上式显然成立,所以 $f(a)$ 是 a 的减函数.

引理 2.3　设 $a \geq \sqrt{2}$,,$0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq \frac{\pi}{2}$,则

$$[a - \sqrt{(a-\cos\theta_1)(a-\cos\theta_2)}]^2$$
$$+ [a - \sqrt{(a-\sin\theta_1)(a-\sin\theta_2)}]^2 \leq 1, \tag{2.12}$$

且满足(2.12)的 a 的最小值为$\sqrt{2}$.

证明　设 $u = \tan\frac{\theta_1}{2}, \nu = \tan\frac{\theta_2}{2}$,此时 $0 \leq u, v \leq 1$,(2.12)式化为

$$\left(a - \sqrt{\left(a - \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\left(a - \frac{1-v^2}{1+v^2}\right)}\right)^2$$
$$+ \left(a - \sqrt{\left(a - \frac{2u}{1+u^2}\right)\left(a - \frac{2v}{1+v^2}\right)}\right)^2 \leq 1,$$

剩下的用 BOTTEMA 容易证明(共花时 55 秒).

定理 2.4 当 $a\geq\sqrt{2}r, b\geq\sqrt{2}r$ 时,则圆

$$\{(x,y)\mid(x-a)^2+(y-b)^2\leq r^2\}$$

为几何凸集,且系数$\sqrt{2}$是最小的.

证明 从定理 2.2 的证明过程来看,只要证当 $a\geq\sqrt{2}, b\geq\sqrt{2}, 0\leq r_1, r_2\leq 1, 0\leq\theta_1, \theta_2\leq 2\pi$,时,有

$$[\sqrt{(a+r_1\cos\theta_1)(a+r_2\cos\theta_2)}-a]^2$$
$$+[\sqrt{(b+r_1\sin\theta_1)(b+r_2\sin\theta_2)}-b]^2\leq 1,$$

成立即可.

由引理 2.1 知只要证

$$[a-\sqrt{(a-|r_1\cos\theta_1|)(a-|r_2\cos\theta_2|)}]^2$$
$$+[b-\sqrt{(b-|r_1\sin\theta_1|)(b-|r_2\sin\theta_2|)}]^2\leq 1$$
$$\Leftarrow[a-\sqrt{(a-|\cos\theta_1|)(a-|\cos\theta_2|)}]^2$$
$$+[b-\sqrt{(b-|\sin\theta_1|)(b-|\sin\theta_2|)}]^2\leq 1,$$

此时不妨设 $b\geq a$,由引理 2.2 的结论,知只要证

$$[a-\sqrt{(a-|\cos\theta_1|)(a-|\cos\theta_2|)}]^2$$
$$+[a-\sqrt{(a-|\sin\theta_1|)(a-|\sin\theta_2|)}]^2\leq 1,$$

再由引理 2.3 上式成立.

定理 2.5 设 $n\geq 2, a_i\geq 2r>0, i=1,2,\cdots,n$,则超球体$\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^2\leq r^2$ 为几何凸集.

定理 2.5 的证明将在第五章里给出.

定理 2.6 设 $n\geq 3, a_i>0, b_i>0, \frac{a_i}{b_i}\geq 2r>0, i=1,2,\cdots,n$,则几何体 $\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-a_i)^2}{b_i^2}\leq r^2$为几何凸集.

证明 记几何体$\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-a_i)^2}{b_i^2}\leq r^2$ 为 E ,则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-a_i)^2}{b_i^2}\leq r^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{b_i}-\frac{a_i}{b_i}\right)^2 \leq r^2,$$

由$\frac{a_i}{b_i}\geq 2r>0, i=1,2,\cdots,n$，和定理2.5知

$$H=\{(\frac{x_1}{b_1},\frac{x_2}{b_1},\cdots,\frac{x_n}{b_n}) \mid (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in E\}$$

为几何凸集，由定理1.8知E也为几何凸集.

结合定理2.4和定理2.5的证明，容易得到：

推论2.1　设$a_i>0, b_i>0, \frac{a_i}{b_i}\geq\sqrt{2}r>0, i=1,2$，则椭圆$\frac{(x-a_1)^2}{b_1^2}+\frac{(y-a_2)^2}{b_2^2}\leq r^2$为几何凸集.

两个公开问题：（1）圆为几何凸集的充分必要条件为什么？

即：设$a>1, b>1, 0\leq\theta_1, \theta_2\leq\frac{\pi}{2}$，使

$$[a-\sqrt{(a-\cos\theta_1)(a-\cos\theta_2)}]^2 + [b-\sqrt{(b-\sin\theta_1)(b-\sin\theta_2)}]^2\leq 1$$

成立的与a, b有关的充要条件为什么？

（2）能不能用人工思维证明引理2.3.

第三节　高维几何凸函数

引理3.1　设$E\subseteq R_{++}^n$为几何凸集，$f: E\to(0,+\infty)$为连续函数，若任取$x\in E, y\in E$，有$f(x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}})\leq\sqrt{f(x)f(y)}$，则对任意自然数$n\geq 2$，任意$\lambda_i\in R_{++}, h_i\in E, i=1,2,\cdots,n$，当$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$时，有

$$f(h_1^{\lambda_1}h_2^{\lambda_2}\cdots h_n^{\lambda_n})\leq f^{\lambda_1}(h_1)f^{\lambda_2}(h_2)\cdots f^{\lambda_n}(h_n)$$

证明　先证$n=2$的情形，任取$x\in E, y\in E$有

$$f(x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}})\leq\sqrt{f(x)f(y)},$$

$x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$代$y$，得

$$f(x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}})\leq f^{\frac{3}{4}}(x)f^{\frac{1}{4}}(y),$$

$x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$用代$x$，得

$$f(x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}) \leq f^{\frac{1}{4}}(x)f^{\frac{3}{4}}(y),$$

反复使用以上两种变换，得到所有不等式中的 x 的指数为$\frac{m}{2^n}$，其中 $m=1,2,3,\cdots,2^n-1$，$n=1,2,3,\cdots$，其中详细过程类似于第一章定理 2.1 的证明，故 x 的指数集为$[0,1]$的稠密集，当 $\lambda_i>0$，$i=1,2$，$\sum\limits_{i=1}^{2}\lambda_i=1$，根据连续函数的性质，有

$$f(x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}) \leq f^{\lambda_1}(x_1)f^{\lambda_2}(x_2).$$

对于 $n\geq 2$ 的一般情形，有

$$\begin{aligned}
f(h_1^{\lambda_1}h_2^{\lambda_2}\cdots h_n^{\lambda_n}) &= f(h_1^{\lambda_1}(h_2^{\frac{\lambda_2}{1-\lambda_1}}\cdots h_n^{\frac{\lambda_n}{1-\lambda_1}})^{1-\lambda_1}) \\
&\leq f^{\lambda_1}(h)[f(h_2^{\frac{\lambda_2}{1-\lambda_1}}\cdots h_n^{\frac{\lambda_n}{1-\lambda_1}})]^{1-\lambda_1} \\
&= f^{\lambda_1}(h_1)[f(h_2^{\frac{\lambda_2}{1-\lambda_1}}(h_n^{\frac{\lambda_3}{1-\lambda_1-\lambda_2}}\cdots h_n^{\frac{\lambda_n}{1-\lambda_1-\lambda_2}})^{\frac{1-\lambda_1-\lambda_2}{1-\lambda_1}})]^{1-\lambda_1} \\
&\leq f^{\lambda_1}(h_1)f^{\frac{\lambda_2}{1-\lambda_1}(1-\lambda_1)}(h_2)f^{\frac{1-\lambda_1-\lambda_2}{1-\lambda_1}(1-\lambda_1)}(h_3^{\frac{\lambda_3}{1-\lambda_1-\lambda_2}}\cdots h_n^{\frac{\lambda_n}{1-\lambda_1-\lambda_2}}) \\
&\leq f^{\lambda_1}(h_1)f^{\lambda_2}(h_2)f^{1-\lambda_1-\lambda_2}(h_3^{\frac{\lambda_3}{1-\lambda_1-\lambda_2}}\cdots h_n^{\frac{\lambda_n}{1-\lambda_1-\lambda_2}}) \\
&\leq \cdots \\
&\leq f^{\lambda_1}(h_1)f^{\lambda_2}(h_2)\cdots f^{\lambda_{n-1}}(h_{n-1})f^{1-\lambda_1-\cdots-\lambda_{n-1}}(h_n) \\
&= f^{\lambda_1}(h_1)f^{\lambda_2}(h_2)\cdots f^{\lambda_{n-1}}(h_{n-1})f^{\lambda_n}(h_n).
\end{aligned}$$

定义 3.1 设 $E\subseteq R_{++}^n$ 为几何凸集，$f:E\to(0,+\infty)$为连续函数，若以下条件之一成立，

（ⅰ）任取 $x,y\in E$ 有 $f(x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}})\leq\sqrt{f(x)f(y)}$.

（ⅱ）任取 $\alpha\in[0,1]$，$x,y\in E$，记 $\beta=1-\alpha$，有

$$f(x^{\alpha}y^{\beta}) \leq f^{\alpha}(x)f^{\beta}(y).$$

（ⅲ）任取自然数 $n\geq 2$，$\lambda_i>0$，$h_i\in E$，$i=1,2,\cdots,n$，当$\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$ 时，有

$$f(h_1^{\lambda_1}h_2^{\lambda_2}\cdots h_n^{\lambda_n}) \leq f^{\lambda_1}(h_1)f^{\lambda_2}(h_2)\cdots f^{\lambda_n}(h_n).$$

则称 f 为E 上的几何凸函数，当不等式反向时，则称 f 为E 上的几何凹函数.

（ⅲ）成立⇒（ⅱ）成立⇒（ⅰ）成立，这是明显的，由引理 3.1 知（ⅰ）成立⇒（ⅲ）成立，所以以上三个条件是等价的.

例 1 求证：函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3$ 是R_{++}^n上的几何

凸函数.

证明　任取 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n_+$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in R^n_+$，则

$$x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}=(\sqrt{x_1y_1},\sqrt{x_2y_2},\cdots,\sqrt{x_ny_n}),$$

$$\begin{aligned}f(x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}})&=x_1^{\frac{3}{2}}y_1^{\frac{3}{2}}+x_2^{\frac{3}{2}}y_2^{\frac{3}{2}}+\cdots+x_n^{\frac{3}{2}}x_n^{\frac{3}{2}}\\&\leq(x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3)^{\frac{1}{2}}(y_1^3+y_2^3+\cdots+y_n^3)^{\frac{1}{2}}\\&=\sqrt{f(x)f(y)}.\end{aligned}$$

例 2　求证：函数 $f(x_1,x_2)=x_1\cos x_2$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})\times(0,\frac{\pi}{2})$ 上是几何凹函数.

证明　任取 $x=(x_1,x_2)$，$y=(y_1,y_2)$，$0<x_1,x_2<\frac{\pi}{2}$，$0<y_1,y_2<\frac{\pi}{2}$，则

$$x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}=(\sqrt{x_1y_1},\sqrt{x_2y_2}),$$

$$f(x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}})=\sqrt{x_1y_1}\cos\sqrt{x_2y_2},$$

根据第二章推论 3.1 有

$$\begin{aligned}f(x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}})&=\sqrt{x_1y_1}\cos\sqrt{x_2y_2}\\&\leqslant\sqrt{x_1y_1}\sqrt{\cos x_2\cos y_2}=\sqrt{f(x)f(y)},\end{aligned}$$

故结论得证.

关于 n 维几何凸凹函数也有以下性质.

定理 3.1　设 $E(\subseteq R^n_{++})$ 为几何凸集，f_1,f_2 为 E 上的几何凸函数，f_3，f_4 是 E 上的几何凹函数，则

（ⅰ）$\frac{1}{f_1(x)}$是 E 上的几何凹函数，$\frac{1}{f_3(x)}$是 E 上的几何凸函数.

（ⅱ）$f_1(x)f_2(x)$为 E 上的几何凸函数，$f_3(x)f_4(x)$是 E 上的几何凹函数.

（ⅲ）$\frac{f_1(x)}{f_3(x)}$是 E 上的几何凸函数，$\frac{f_3(x)}{f_1(x)}$是 E 上的几何凹函数.

定理 3.1 证略.

定理 3.2　设 f_1,f_2 是 $E(\subseteq R^n_{++})$上的几何凸函数，f_3,f_4 是$E(\subseteq R^n_{++})$上的几何凹函数，$c>0$ 为常数，$H=\{\frac{x}{c}\mid x\in E\}$，则

(ⅰ) $cf_1(x)$是 E 上的几何凸函数，$cf_3(x)$是 E 上的几何凹函数.

(ⅱ) $f_1(cx)$在 H 上是几何凸函数，$f_3(cx)$在 H 上是几何凹函数.

(ⅲ) $c+f_1(x)$是 E 上的几何凸函数.

(ⅳ)当 $f_1(x)\le c$ 时，$c-f_1(x)$是 E 上的几何凹函数；当 $f_3(x)\ge c>0$ 时，$f_3(x)-c$ 是E 上的几何凹函数.

证明 显然 H 为几何凸集，

(ⅰ)显然，

(ⅱ)任取 $x,y\in H$，因

$$f_1(cx^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}})=f_1((cx)^{\frac{1}{2}}(cy)^{\frac{1}{2}})\le\sqrt{f_1(cx)f_1(cy)},$$

故 $f_1(cx)$是 H 上的几何凸函数，同理 $f_3(cx)$是 H 上的几何凹函数.

(ⅲ) $c+f_1(x)$是几何凸函数，等价于

$$\begin{aligned}
&c+f_1(x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}})\le\sqrt{c+f_1(x)}\sqrt{c+f_1(y)}\\
&\Leftarrow c+\sqrt{f_1(x)f_1(y)}\le\sqrt{c+f_1(x)}\sqrt{c+f_1(y)}\\
&\Leftrightarrow c^2+2c\sqrt{f_1(x)f_1(y)}+f_1(x)f_1(y)\\
&\qquad\le c^2+c(f_1(x)+f_1(y))+f_1(x)f_1(y), \qquad (3.1)\\
&\Leftrightarrow 2\sqrt{f_1(x)f_1(y)}\le f_1(x)+f_1(y),
\end{aligned}$$

最后一式显然成立.

(ⅳ)类似于(ⅲ)的证明，在此从略.

可以发现，这些定理是一维中有关定理的平行推广，其证明也是平行的，所以以下几个定理不再证明.

定义 3.2 设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in R^n$，若都有 $x_i\ge y_i(i=1,2,\cdots,n)$，则称 $x\ge y$.

定义 3.3 设 $E\subsetneq R^n$，函数 $f:E\to R$，

(ⅰ)若对于 $x,y\in E$，$x\ge y$，都有 $f(x)\ge f(y)$，则称 f 在E 上是单调递增函数.

(ⅱ)若对于 $x,y\in E$，$x\ge y$，都有 $f(x)\le f(y)$，则称 f 在E 上是单调递减函数.

定理 3.3 设 $c>0$ 为常数，

$$E=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]\subseteq R^n_{++},$$

$a_i>c$，$b_i(i=1,2,\cdots,n)$为有限或正无穷，记$\bar{c}=(c,c,\cdots,c)$，设 $H=\{x-\bar{c}\mid x\in E\}$，

(ⅰ)若 f 是E 上的单调递增的几何凸函数,则 $f(x+\bar{c})$在 H 上是几何凸函数.

(ⅱ)若 f 是E 上的单调递减的几何凹函数,则 $f(x+\bar{c})$是 H 上几何凹函数.

定理 3.4 设 $c\geq 0$ 为常数,

$$E=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]\subseteq R^n_{++},$$

$a_i\geqslant c,b_i(i=1,2,\cdots,n)$,为有限或正无穷,记$\bar{c}=(c,c,\cdots,c)$,设,$H=\{x+\bar{c}\mid x\in E\}$,

(ⅰ)若 f 是E 上的单调递减的几何凸函数,则 $f(x-\bar{c})$在 H 是几何凸函数.

(ⅱ)若 f 是E 上的单调递增的几何凹函数,则 $f(x-\bar{c})$在 H 是几何凹函数.

定理 3.5 若 $c>0,a_i>0,b_i>0,i=1,2,\cdots,n$,

$$E=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]$$
$$\subseteq[0,c]\times[0,c]\times\cdots\times[0,c],$$

记$\bar{c}=(c,c,\cdots,c),H=\{\bar{c}-x\mid x\in E\}$,

(ⅰ)f 是E 上的单调递减的几何凸函数,则 $f(\bar{c}-x)$在 H 是几何凸函数.

(ⅱ)f 是E 上的单调递增的几何凹函数,则 $f(\bar{c}-x)$在 H 是几何凹函数.

证明 显然若

$$H=[c-b_1,c-a_1]\times[c-b_2,c-a_2]\times\cdots\times[c-b_n,c-a_n],$$

则 H 为几何凸集.

(ⅰ)任取 $x,y\in H$,由条件知 $x,y\in R^n_{++}$,又

$$\bar{c}-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\geq(\bar{c}-x)^{\frac{1}{2}}(\bar{c}-y)^{\frac{1}{2}},$$

$$f(\bar{c}-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}})\leqslant f((\bar{c}-x)^{\frac{1}{2}}(\bar{c}-y)^{\frac{1}{2}})\leq\sqrt{f(\bar{c}-x)f(\bar{c}-y)},$$

则 $f(\bar{c}-x)$是几何凸函数.

(ⅱ)类似可证.

同样可以把定理 3.2 的(ⅲ)和(ⅳ)加强以下很实用的定理,读者可自已完成证明.

定理 3.6 (ⅰ)若 f,g 是$E(\subseteq R^n_{++})$上的几何凸函数,则 $f+g$是 E 上的几何凸函数.

(ⅱ)若 f 是 $E(\subseteq R_{++}^n)$ 上的几何凹函数，g 是 $E(\subseteq R_{++}^n)$ 上的几何凸函数，且 $f(x)\geq g(x)$，则 $f(x)-g(x)$ 是 E 上的几何凹函数.

推论 3.1 若 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是 $E(\subseteq R_{++}^n)$ 上的几何凸函数，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为正常数，则 $\sum_{i=1}^{n}a_if_i$ 是几何凸函数.

关于复合函数的几何凸凹性，同样有以下结果，证明略.

定理 3.7 f_1 是 $E(\subseteq R_{++}^n)$ 上的几何凸函数，f_2 是 $E(\subseteq R_{++}^n)$ 上的几何凹函数，f_3 是 (a,b) 上的函数. $f_3(f_1(x))$ 和 $f_3(f_2(x))$ 都有意义，

(ⅰ)若 f_3 是单调递增的几何凸函数，则 $f_3(f_1(x))$ 是 E 上的几何凸函数.

(ⅱ)若 f_3 是单调递减的几何凹函数，则 $f_3(f_1(x))$ 是 E 上的几何凹函数.

(ⅲ)若 $f_3(x)$ 是单调递增的几何凹函数，则 $f_3(f_2(x))$ 是 E 上的几何凹函数.

(ⅳ)若 $f_3(x)$ 是单调递减的几何凸函数，则 $f_3(f_2(x))$ 是 E 上的几何凸函数.

推论 3.2 (ⅰ)若 f 是几何凸函数，$c>0$ 为常数，则 f^c 是 E 上的几何凸函数.

(ⅱ)若 f 是几何凹函数，$c>0$ 为常数，则 f^c 是 E 上的几何凹函数.

证明 由于函数 $y=t^c(0,+\infty)$ 在是单调递增的几何凸函数，又是几何凹函数，根据定理 3.7 的(ⅰ)和(ⅲ)可知推论成立.

以下几个定理为显然的.

定理 3.8 设几何凸(凹)函数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ 在 $E(\subseteq R_{++}^n)$ 上有定义，且收敛于连续函数 $f(x)$，则 f 也是 E 上的几何凸(凹)函数.

推论 3.3 设几何凸函数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ 在 $E(\subseteq R_{++}^n)$ 上有定义，且 $\sum_{i=1}^{+\infty}f_i(x)$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$，则 f 也是 E 上的几何凸函数.

第四节 不同维几何凸函数之间的一些关系

先研究几何凸集的投影，设 $E\subseteq R_{++}^n$，I 为 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的任一非空子集，元素个数设为 r，$\overline{I}=\{1,2,\cdots,n\}-I$，任取一向量 $x_0\in E$，则称 $E_{x_0}^I=\{x\in E \mid x$ 与 x_0 关于 $\overline{I}$ 中的分量相等$\}$ 为 E 沿 x_0 在 I 上投影.

引理 4.1　设 $E\subseteq R^n_{++}$ 为几何凸集，I 为 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的任一非空子集，任取一向量 $x_0\in E$，则 $E^I_{x_0}$ 也为几何凸集.

证明　任取 $x,y\in E^I_{x_0}\subseteq E$，因 $E(\subseteq R^n_{++})$ 为几何凸集，所以 $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\in E$，且由于 x,y 与 x_0 关于 $\overline{I}$ 中的分量相等，则 $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$ 与 x_0 关于 $\overline{I}$ 中的分量相等，故 $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\in E^I_{x_0}$.

定理 4.1　设 f 是 $E(\subseteq R^n_{++})$ 上的几何凸函数，I 为 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的非空子集，任取一向量 $x_0\in E$，则 f 在 $E^I_{x_0}$ 上的限制是几何凸函数.

若 I 中元素个数设为 r，此时对于函数 f，自变量中有 $n-r$ 个为常量，f 在 $E^I_{x_0}$ 上的限制是 r 维几何凸函数.

定理 4.2　(ⅰ)设 $f_1(x)$ 是 $H(\subseteq R^n_{++})$ 上的几何凸函数，$f_2(y)$ 是 $E(\subseteq R^m_{++})$ 上的几何凸函数，则 $f_1(x)+f_2(y)$，$f_1(x)f_2(y)$ 是 $H\times E$ 上的几何凸函数.

(ⅱ) 设 $f_1(x)$ 是 $H(\subseteq R^n_{++})$ 上的几何凹函数，$f_2(y)$ 是 $E\subseteq R^m_{++}$ 上的几何凹函数，则 $f_1(x)f_2(y)$ 是 $H\times E$ 上的几何凹函数.

证明　根据本章引理 1.1 知 $H\times E$ 为几何凸集.

(ⅰ)设 $f(z)=f_1(x)+f_2(y)$，任取

$$m=(u_1,u_2),n=(v_1,v_2)\in H\times E,$$

则有

$$\begin{aligned}f(m^\alpha n^\beta)&=f_1(u_1^\alpha v_1^\beta)+f_2(u_2^\alpha v_2^\beta)\\&\leq f_1^\alpha(u_1)f_1^\beta(v_1)+f_2^\alpha(u_2)f_2^\beta(v_2)\\&\overset{(4.1)}{\leq}(f_1(u_1)+f_2(u_2))^\alpha(f_1(v_1)+f_2(v_2))^\beta=f^\alpha(m)f^\beta(n).\end{aligned}$$

其中(4.1)式由 ***Hölder*** 不等式得到. 根据定义易知 $f_1(x)f_2(y)$ 是 $H\times E$ 上的几何凸函数，详细过程从略.

(ⅱ)也为易证，在此略.

推论 4.1　设 $I(\subseteq R_{++})$ 为一个区间，f 是 I 上的几何凸(凹)函数，则函数 $f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)$ 是 I^n 上的几何凸(凹)函数.

推论 4.2　设 $I(\subseteq R_{++})$ 为一个区间，f 是 I 上的几何凸函数，则函数 $f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)$ 是 I^n 上的几何凸函数.

关于 $f(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ 的几何凸凹性，这里有：

定理 4.3 （ⅰ）设 f 是 $I(\subseteq R_{++})$ 上的单调递增的几何凸函数，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则函数 $g(x)=f(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ 是 I^n 上的几何凸函数.

（ⅱ）设 f 是 $I(\subseteq R_{++})$ 上的单调递减的几何凹函数，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则 $g(x)=f(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ 是 I^n 上的几何凹函数.

证明 先证 f 是几何凸函数的情形，任取向量 $x=(x_1,x_2\cdots,x_n)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in I^n$，则

$$\begin{aligned} g(x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}) &= f(\sqrt{x_1y_1}+\sqrt{x_2y_2}+\cdots+\sqrt{x_ny_n}) \\ &\le f(\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n}\sqrt{y_1+y_2+\cdots+y_n}) \\ &\le f^{\frac{1}{2}}(x_1+x_2+\cdots+x_n)f^{\frac{1}{2}}(y_1+y_2+\cdots+y_n) \\ &= f^{\frac{1}{2}}(x)f^{\frac{1}{2}}(y). \end{aligned}$$

故 g 是 I^n 上的几何凸函数，同理可证 f 是几何凹函数，在此从略.

例 1 设 $\Gamma(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的 *Gamma* 函数，其在 α_0（参见第三章第四节）处取最小值，则 $\Gamma(p+q)$ 是 $(\alpha_0,+\infty)\times(\alpha_0+\infty)$ 上的几何凸函数.

证明是容易的，因 $\Gamma(x)$ 在 $(0.217,+\infty)$ 上是几何凸函数，在 $(\alpha_0,+\infty)$ 上是单调递增的，再由定理 4.3 推得即可.

第五节 高维几何凸函数的一个判别法则

从定义上判别高维几何凸函数，在许多情况下同样是难以办到的，这里将给出一个判别法则.

定理 5.1 （ⅰ）设 $f(x)$ 是 $E(\subseteq R^n_{++})$ 上的几何凸（凹）函数，则 $\ln f(e^x)$ 是 $\ln E=\{\ln x\mid x\in E\}$ 上的凸（凹）函数.

（ⅱ）设 $g(x)$ 是 $H(\subseteq R^n)$ 上的凸（凹）函数，则 $e^{g(\ln x)}$ 是 $e^H=\{e^x\mid x\in H\}$ 上的几何凸（凹）函数.

证明 仅证凸的情形.

（ⅰ）任取 $x,y\in\ln E$，有 $e^x,e^y\in E$，所以

$$\begin{aligned} \ln f(e^{\alpha x+\beta y}) &= \ln f(e^{\alpha x}e^{\beta y}) = \ln f((e^x)^\alpha(e^y)^\beta) \\ &\le \ln[f^\alpha(e^x)f^\beta(e^y)] = \alpha\ln f(e^x)+\beta\ln f(e^y), \end{aligned}$$

故 $\ln f(e^x)$ 是 $\ln E$ 上的凸函数.

（ⅱ）任取 $x,y\in e^H$，有 $\ln x,\ln y\in H$，所以

$$e^{g(\ln x^\alpha y^\beta)} = e^{g(\alpha\ln x+\beta\ln y)} \le e^{\alpha g(\ln x)+\beta g(\ln y)}$$

$$= e^{\alpha g(\ln x)} e^{\beta g(\ln y)} = [e^{g(\ln x)}]^{\alpha} [e^{g(\ln y)}]^{\beta},$$

故 $e^{g(\ln x)}$ 是 e^H 上的几何凸函数.

判别一个函数为高维凸(凹)函数方法很多,这样我们可以通过定理5.1,得到一些几何凸(凹)函数的判别方法,下面这一种最常见.

定理5.2 设 $f: H \subseteq R^n_{++} \to (0,+\infty)$,且二阶可微,

(i)若

$$\begin{pmatrix} f\cdot f_{11}+\dfrac{f}{x_1}f_1-(f_1)^2 & f\cdot f_{12}-f_1f_2 & \cdots & f\cdot f_{1n}-f_1f_n \\ f\cdot f_{21}-f_1f_2 & f\cdot f_{22}+\dfrac{f}{x_2}f_2-(f_2)^2 & \cdots & f\cdot f_{2n}-f_2f_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f\cdot f_{n1}-f_1f_n & f\cdot f_{n2}-f_2f_n & & f\cdot f_{nn}+\dfrac{f}{x_n}f_n-(f_n)^2 \end{pmatrix}$$

为半正定,则 f 是几何凸函数,反之亦然.

(ii)若

$$\begin{pmatrix} f\cdot f_{11}+\dfrac{f}{x_1}f_1-(f_1)^2 & f\cdot f_{12}-f_1f_2 & \cdots & f\cdot f_{1n}-f_1f_n \\ f\cdot f_{21}-f_1f_2 & f\cdot f_{22}+\dfrac{f}{x_2}f_2-(f_2)^2 & \cdots & f\cdot f_{2n}-f_2f_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f\cdot f_{n1}-f_1f_n & f\cdot f_{n2}-f_2f_n & & f\cdot f_{nn}+\dfrac{f}{x_n}f_n-(f_n)^2 \end{pmatrix}$$

为半负定,则 f 是几何凹函数,反之亦然.

证明 仅讨论(i),根据定理5.1,欲证 f 是几何凸函数,只要证 $\ln f(e^y)$ 是凸函数即可,由第一章的定理2.3知,只要证 $\left(\dfrac{\partial^2[\ln f(e^y)]}{\partial y_i \partial y_j}\right) \in R^{n\times n}$ 为半正定的,而

$$\frac{\partial(\ln f(e^y))}{\partial y_i} = \frac{f_i(e^y)}{f(e^y)} e^{y_i}, i = 1,2,\cdots,n.$$

$$\frac{\partial^2(\ln f(e^y))}{\partial y_i^2}$$
$$= \frac{(e^{y_i} f_i(e^y) + e^{2y_i} f_{ii}(e^y)) f(e^y) - e^{y_i} f_i(e^y)\cdot f_i(e^y) e^{y_i}}{f^2(e^y)},$$

$$\frac{\partial^2(\ln f(e^y))}{\partial y_i^2}=\frac{(e^{y_i}f_i'(e^y)+e^{2y_i}f_{ii}''(e^y))f(e^y)-e^{2y_i}(f_i'(e^y))^2}{f^2(e^y)},$$

且

$$\frac{\partial^2(\ln f(e^y))}{\partial y_i\partial y_j}=\frac{e^{y_i}e^{y_j}f_{ij}''(e^y)f(e^y)-e^{y_i}e^{y_j}f_i'(e^y)f_j'(e^y)}{f^2(e^y)},$$

$$i,j=1,2,\cdots,n,i\neq j,$$

所以

$$\left(\frac{\partial^2[\ln f(e^y)]}{\partial y_i\partial y_j}\right)=$$

$$\frac{1}{f^2(e^y)}\begin{pmatrix} e^{2y_1}[f\cdot f_{11}''+\frac{f}{e^{y_1}}f_1'-(f_1')^2] & \cdots & e^{y_1+y_n}[f\cdot f_{1n}''-f_1'f_n'] \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ e^{y_1+y_n}[f\cdot f_{n1}''-f_1'f_n'] & \cdots & e^{2y_n}[f\cdot f_{nn}''+\frac{f}{e^{y_n}}f_n'-(f_n')^2] \end{pmatrix},$$

考虑顺序主子式,在第一行、第一列中各提取 e^{y_1},在第二行、第二列中各提取 e^{y_2},依此类推,不改变各阶顺序主子式的正负性,故只要证矩阵

$$\begin{pmatrix} f\cdot f_{11}''+\frac{f}{e^{y_1}}f_1'-(f_1')^2 & \cdots & f\cdot f_{1n}''-f_1'f_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f\cdot f_{n1}''-f_1'f_n' & \cdots & f\cdot f_{nn}''+\frac{f}{e^{y_n}}f_n'-(f_n')^2 \end{pmatrix}$$

是半正定性的.令 $x_i=e^{y_i}(i=1,2,\cdots,n)$,只要证

$$\begin{pmatrix} f\cdot f_{11}''+\frac{f}{x_1}f_1'-(f_1')^2 & \cdots & f\cdot f_{1n}''-f_1'f_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f\cdot f_{n1}''-f_1'f_n' & \cdots & f\cdot f_{nn}''+\frac{f}{x_n}f_n'-(f_n')^2 \end{pmatrix}$$

是半正定的,根据题意,命题成立.反之也容易证,在此从略.

例 1 设函数 $f(x_1,x_2)=\dfrac{x_1+1}{x_2+1}+x_2$,求证:$f$ 在 $(0,3]\times[1,+\infty)$ 上为几何凸函数.

证明 显然有

$$f_1'(x_1,x_2)=\frac{1}{x_2+1},\qquad f_2'(x_1,x_2)=-\frac{x_1+1}{(x_2+1)^2}+1$$

$$f_{11}''(x_1,x_2)=0,\qquad f_{12}''(x_1,x_2)=-\frac{1}{(x_2+1)^2},$$

$$f_{22}''(x_1,x_2)=\frac{2(x_1+1)}{(x_2+1)^3},$$

进而有

$$f\cdot f_{11}''+\frac{f}{x_1}f_1'-(f_1')^2=\left[\frac{x_1+1}{x_1(x_2+1)}+\frac{x_2}{x_1}\right]\frac{1}{x_2+1}-\frac{1}{(x_2+1)^2}=\frac{x_2^2+x_2+1}{x_1(x_2+1)^2},$$

$$f\cdot f_{12}''-f_1'f_2'=-\left(\frac{x_1+1}{x_2+1}+x_2\right)\frac{1}{(x_2+1)^2}-\frac{1}{x_2+1}\cdot\left[1-\frac{x_1+1}{(x_2+1)^2}\right]=\frac{2x_1-x_2+1}{(x_2+1)^3},$$

$$\begin{aligned}&f\cdot f_{22}''+\frac{f}{x_2}f_2'-(f_2')^2\\&=\left(\frac{x_1+1}{x_2+1}+x_2\right)\frac{2(x_1+1)}{(x_2+1)^3}+\left[\frac{x_1+1}{x_2(x_2+1)}+1\right]\\&\cdot\left[1-\frac{x_1+1}{(x_2+1)^2}\right]-\left[1-\frac{x_1+1}{(x_2+1)^2}\right]^2\\&=\frac{4x_1x_2^3+4x_2^3+7x_1x_2^2+7x_2^2+4x_1x_2+4x_2-x_1^2-x_1}{x_2(x_2+1)^4},\end{aligned}$$

所以有

$$\begin{vmatrix}f\cdot f_{11}''+\frac{f}{x_1}f_1'-(f_1')^2 & f\cdot f_{12}''-f_1'f_2'\\ f\cdot f_{12}''-f_1'f_2' & f\cdot f_{22}''+\frac{f}{x_2}f_2'-(f_2')^2\end{vmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} \frac{x_2^2+x_2+1}{x_1(x_2+1)^2} & \frac{2x_1-x_2+1}{(x_2+1)^3} \\ \frac{2x_1-x_2+1}{(x_2+1)^3} & \frac{4x_1x_2^3+4x_2^3+7x_1x_2^2+7x_2^2+4x_1x_2+4x_2-x_1^2-x_1}{x_2(x_2+1)^4} \end{pmatrix},$$

要验证上矩阵为半正定阵,只要证

$$(x_2^2+x^2+1)(4x_1x_2^3+4x_2^3+7x_1x_2^2+7x_2^2+4x_1x_2+4x_2-x_1^2-x_1)$$
$$-x_1x_2(2x_1-x_2+1)^2\geq 0$$
$$\Leftarrow 3(4x_1x_2^3+4x_2^3+7x_1x_2^2+7x_2^2+4x_1x_2+4x_2-x_1^2-x_1)$$
$$-x_1x_2^3+2x_1x_2^2(2x_1+1)-x_1x_2(2x_1+1)^2\geq 0$$
$$\Leftrightarrow 11x_1x_2^3+12x_2^3+23x_1x_2^2+21x_2^2+12x_1x_2$$
$$+12x_2-3x_1^2-3x_1+4x_1^2x_2^2-x_1x_2(2x_1+1)^2\geq 0$$
$$\Leftarrow 11x_1x_2+12x_2+23x_1x_2+21x_2+12x_1x_2+12x_2$$
$$-3x_1^2-3x_1+4x_1^2x_2-4x_1^3x_2-4x_1^2x_2-x_1x_2\geq 0$$
$$\Leftarrow 11x_1x_2+12x_2+22x_1x_2+21x_2$$
$$+12x_1x_2+12x_2-3x_1^2-3x_1-4x_1^3x_2\geq 0$$
$$\Leftarrow 11x_1x_2+12x_2+22x_1x_2+21x_2+12x_1x_2$$
$$+12x_2-9x_1-3x_1-36x_1x_2\geq 0$$
$$\Leftarrow 9x_1x_2+45x_2-12x_1\geq 0,$$

因 $x_1>0,x_2\geq 1$,最后一式是显然的,利用定理 5.2 本题得证.

例 2 设二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$,其中 $a_{ij}=a_{ji}$,求证:f 是 R_{++}^n 上的几何凸函数的充分必要条件为 $a_{ij}\geq 0,i,j=1,2,\cdots,n$.

证明 充分性.因 $a_{ij}\geq 0,i,j=1,2,\cdots,n$,所以 $a_{ij}x_ix_j$ 为几何凸函数,由定理 4.2 知,$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ 为几何凸函数.

必要性.因 f 在 R_{++}^n 上为几何凸函数,所以任取 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R_{++}^n$ 有

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\geq 0,$$

若某个 $a_{i_0i_0}=0(1\leq i_0\leq n)$,则 f 为 x_{i_0} 的一次多项式,其系数 $\sum_{j\neq i_0}2a_{ji_0}x_j$ 要恒为正(不然可取 x_{i_0} 足够大,可使 f 为负),于是所有 $2a_{ji_0}(j\neq i_0)$ 为非负(不然

取相应的 x_j 足够大,可使 $\sum\limits_{j\neq i_0}2a_{ji_0}x_j$ 为负),即 $a_{ji_0}\geq 0$;下考虑 $a_{ii}\neq 0$ 时,

$f_i'(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{j=1}^{n}2a_{ij}x_j$, $f_{ij}''(x_1,x_2,\cdots,x_n)=2a_{ij}$,所以

$$f\cdot f_{11}''+\frac{f}{x_1}f_1'-(f_1')^2$$

$$=2a_{11}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j-\left(\sum_{j=1}^{n}2a_{1j}x_j\right)^2+\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}2a_{1j}x_j}{x_1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j,$$

$$x_1\left[f\cdot f_{11}''+\frac{f}{x_1}f_1'-(f_1')^2\right]$$

$$=2a_{11}x_1\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j-x_1\left(\sum_{j=1}^{n}2a_{1j}x_j\right)^2+\sum_{j=1}^{n}2a_{1j}x_j\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j,\tag{5.1}$$

又据定理 5.2 知

$$\begin{pmatrix} f\cdot f_{11}''+\frac{f}{x_1}f_1'-(f_1')^2 & \cdots & f\cdot f_{1n}''-f_1'f_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f\cdot f_{n1}''-f_1'f_n' & \cdots & f\cdot f_{nn}''+\frac{f}{x_n}f_n'-(f_n')^2 \end{pmatrix}$$

为半正定矩阵,$f\cdot f_{11}''+\frac{f}{x_1}f_1'-(f_1')^2$ 为非负,即 $x_1\left[f\cdot f_{11}''+\frac{f}{x_1}f_1'-(f_1')^2\right]$为非负,若 $a_{22}\neq 0$,(5.1)式的右边的 x_2 的最高次为 3 次,系数是 $2a_{12}a_{22}$,故有 $2a_{12}a_{22}\geq 0$,$a_{12}\geq 0$;若 $a_{22}=0$,此时 $a_{12}\geq 0$ 已证,即总有 $a_{12}\geq 0$;同样道理可证所有的 $a_{ij}\geq 0$.

几何凸函数理论只有与控制不等式理论相结合,才能发挥巨大作用.以下定义可见[14]和[18].

定义 5.1 设

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in E\subseteq R_{++}^n,\ y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in E,$$

把 x,y 中的分量从大到小重排列后,记为$(x_{[1]},x_{[2]},\cdots,x_{[n]})$和$(y_{[1]},y_{[2]}\cdots,y_{[n]})$,若有

$$\begin{cases}\prod\limits_{i=1}^{k}x_{[i]}\geq\prod\limits_{i=1}^{k}y_{[i]}, & k=1,2\cdots n-1,\\ x_1x_2\cdots x_n=y_1y_2\cdots y_n,\end{cases}\tag{5.2}$$

此称$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$对数控制$(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，记为$\ln x \succ \ln y$.

说明定义中的记法，若

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R_{++}^n,\ y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in R_{++}^n,$$

对(5.2)的 $n-1$ 个式子两边取对数，不难发觉$(\ln x_1,\ln x_2,\cdots,\ln x_n)$控制$(\ln y_1,\ln y_2,\cdots,\ln y_n)$.

定理 5.3 设 $E(\subseteq R_{++}^n)$为对称的几何凸集，$x,y\in E$，且 $\ln x\succ \ln y$，

(ⅰ)若对称函数 f 为E 上的几何凸函数，则 $f(x)\geq f(y)$，等式成立当且仅当 $x=y$.

(ⅱ)若对称函数 $f(x)$为 E 上的几何凹函数，则 $f(x)\leq f(y)$等式成立当且仅当 $x=y$.

证明 当 $f(x)$为几何凸函数时，据定理 5.1，$\ln f(e^x)$为 $\ln H=\{\ln x\mid x\in H\}$上的凸函数，由 $\ln x\succ\ln y$ 和第一章的定理 3.3，有 $\ln f(e^{\ln x})\geq \ln f(e^{\ln y})$，$\ln f(x)\geq \ln f(y)$，$f(x)\geq f(y)$；同理可证定理的第二部分.

推论 5.1[18] (ⅰ)设 f 为$I\subseteq R_{++}$上的几何凸函数，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in I^n$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in I^n$，$\ln x\succ \ln y$，则有

$$f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\geq f(y_1)f(y_2)\cdots f(y_n).$$

(ⅱ) 反之，若 f 为$I\subseteq R_{++}$上的几何凹函数，则上不等式反向成立.

$$f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\leq f(y_1)f(y_2)\cdots f(y_n).$$

下面仅证(ⅰ)，我们给出两种不同的证法，其中证法一可见文[18].

证法一 (ⅰ) 因 $\ln x\succ \ln y$，，由文[15]知存在实双随机矩阵 P，使得

$$\ln y=\ln xP,$$

记 $P=(p_{ij})\in R_{+}^{n\times n}(i,j=1,2,\cdots,n)$，从而得到

$$\ln y_j=\sum_{i=1}^{n}p_{ij}\ln x_i=\ln(x_1^{p_{1j}}x_2^{p_{2j}}\cdots x_n^{p_{nj}}),$$

$$y_j=x_1^{p_{1j}}x_2^{p_{2j}}\cdots x_n^{p_{nj}},$$

由于 f 是几何凸函数，且 $p_{1j}+p_{2j}+\cdots+p_{nj}=1(j=1,2,\cdots,n)$，所以

$$f(y_1)=f(x_1^{p_{11}}x_2^{p_{21}}\cdots x_n^{p_{n1}})\leq f^{p_{11}}(x_1)f^{p_{21}}(x_2)\cdots f^{p_{n1}}(x_n),$$

$$f(y_2)=f(x_1^{p_{12}}x_2^{p_{22}}\cdots x_n^{p_{n2}})\leq f^{p_{12}}(x_1)f^{p_{22}}(x_2)\cdots f^{p_{n2}}(x_n),$$

$$\cdots$$

$$f(y_n)=f(x_1^{p_{1n}}x_2^{p_{2n}}\cdots x_n^{p_{nn}})\leq f^{p_{1n}}(x_1)f^{p_{2n}}(x_2)\cdots f^{p_{nn}}(x_n),$$

上 n 式相乘有

$$f(y_1)f(y_2)\cdots f(y_n)\leq f^{\sum_{i=1}^{n}p_{1i}}(x_1)f^{\sum_{i=1}^{n}p_{2i}}(x_2)\cdots f^{\sum_{i=1}^{n}p_{ni}}(x_n),$$

又由 P 为双随机矩阵,从而

$$\sum_{i=1}^{n}p_{ji}=1(j=1,2,\cdots,n),$$

所以有

$$f(y_1)f(y_2)\cdots f(y_n)\leq f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)$$

结论(ⅰ)得证.

证明二 因 $f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)$ 都是 I 上的几何凸函数,所以 $f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)$ 是 I^n 上的几何凸函数,再由定理 5.3 即知结论成立.

推论 5.2[47] (ⅰ)设 f 是 $(0,A]$ 上的几何凸函数,且实数 $a\in(0,A]$, $x_1,x_2,\cdots,x_n\in(0,a]$, $n\geq2$,则有

$$f^{n-1}(a)\cdot f\left(\frac{x_1x_2\cdots x_n}{a^{n-1}}\right)\geq f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n).$$

(ⅱ)反之,若 f 是 $(0,A]$ 上的几何凹函数,则上不等式反向成立.

其实此时易证 $(\underbrace{a,a,\cdots,a}_{n-1},\frac{x_1x_2\cdots x_n}{a^{n-1}})$ 指数控制 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,再由推论 5.1 可推知推论 5.2 成立.

定理 5.4(*Karamata* 控制不等式) 设两个实数列 $(a_1,a_2\cdots,a_n)$ 和 $(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 满足条件

$$\begin{cases}a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n,\\ b_1\geq b_2\geq\cdots\geq b_n,\\ \sum_{i=1}^{k}a_i\geq\sum_{i=1}^{k}b_i,(1\leq k\leq n-1),\\ \sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}b_i.\end{cases}$$

(ⅰ)若 g 是凸函数,则有

$$g(a_1)+g(a_2)+\cdots+g(a_n)\geq g(b_1)+g(b_2)+\cdots+g(b_n).$$

(ⅱ)若 g 是凹函数,则有

$$g(a_1)+g(a_2)+\cdots+g(a_n)\leq g(b_1)+g(b_2)+\cdots+g(b_n).$$

证明 只需证明(ⅰ),设

$$x_i=e^{a_i},y_i=e^{b_i},a_i=\ln x_i,b_i=\ln y_i,(i=1,2,\cdots,n),$$

显然 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 对数控制 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,因为 g 是凸函数,所以 $e^{g(\ln x)}$

为几何凸函数,又由推论 5.1 知

$$e^{g(\ln x_1)}e^{g(\ln x_2)}\cdots e^{g(\ln x_n)}\geq e^{g(\ln y_1)}e^{g(\ln y_2)}\cdots e^{g(\ln y_n)},$$

$$e^{g(a_1)}e^{g(a_2)}\cdots e^{g(a_n)}\geq e^{g(b_1)}e^{g(b_2)}\cdots e^{g(b_n)},$$

$$e^{g(a_1)+g(a_2)+\cdots+g(a_n)}\geq e^{g(b_1)+g(b_2)+\cdots+g(b_n)},$$

故

$$g(a_1)+g(a_2)+\cdots+g(a_n)\geq g(b_1)+g(b_2)+\cdots+g(b_n).$$

对于(ⅱ),同样可用推论 5.2 的(ⅱ)证明.

同样也可以用定理 5.4 证明推论 5.1.

证明 (ⅰ)因 $\ln x\succ\ln y$,所以

$$(\ln x_1,\ln x_2,\cdots,\ln x_n)\succ(\ln y_1,\ln y_2,\cdots,\ln y_n),$$

又 $f(t)$为几何凸函数,$\ln f(e^t)$为凸函数,由 *Karamata* 控制不等式知

$$\ln f(e^{\ln x_1})+\ln f(e^{\ln x_2})+\cdots+\ln f(e^{\ln x_n})$$

$$\geq\ln f(e^{\ln y_1})+\ln f(e^{\ln y_2})+\cdots+\ln f(e^{\ln y_n}),$$

$$\ln[f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)]\geq\ln[f(y_1)f(y_2)\cdots f(y_n)],$$

$$f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\geq f(y_1)f(y_2)\cdots f(y_n).$$

由此可见,定理 5.4 与推论 5.1 是等价的.

例 3[23] 设 $x,y\in R^n_{++}$,$\ln x\succ\ln y$,α 为实数,则成立不等式

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i^\alpha+1)\geq\prod_{i=1}^{n}(y_i^\alpha+1),$$

等式成立当且仅当 $x=y$.

证明 容易验证 $\phi(t)=t^\alpha+1$ 是 R_{++} 上的几何凸函数,由推论 5.1 可证命题成立.

例 4[21] 设 $y=\phi(t)$是 R_{++} 上的几何凸函数,$0\leq a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n$,$0\leq b_1\leq b_2\leq\cdots\leq b_n$,则有

$$\prod_{i=1}^{n}\phi(a_ib_i)\geq\prod_{i=1}^{n}\phi(a_ib_{k_i})\geq\prod_{i=1}^{n}\phi(a_ib_{n+1-i}),\tag{5.3}$$

$$\prod_{i=1}^{n}(a_ib_i+1)\geq\prod_{i=1}^{n}(a_ib_{k_i}+1)\geq\prod_{i=1}^{n}(a_ib_{n+1-i}+1),\tag{5.4}$$

等式成立当且仅当 $a_i=b_i(i=1,2,\cdots,n)$.

证明 此时$(a_nb_n,\cdots,a_2b_2,a_1b_1)$对数控制$(a_nb_{k_n},\cdots,a_2b_{k_2},a_1b_{k_1})$而根据第一章的定理 3.1 有

$$(\ln a_n + \ln b_{k_n}, \cdots, \ln a_2 + \ln b_{k_2}, \ln a_1 + \ln b_{k_1})$$

控制

$$(\ln a_n + \ln b_1, \cdots, \ln a_2 + \ln b_{n-1}, \ln a_1 + \ln b_n),$$

由推论 5.1 知(5.3)式成立;再令 $y = \phi(t) = t + 1$ 即知(5.4)式成立.

例 5[14] 设 $x, y, z > 0$,则有

$$\frac{x+y+z}{3} + \sqrt[3]{xyz} \geq \frac{2}{3}(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx})$$

成立.

证明 因

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_6) = x_1 + x_2 + \cdots + x_6$$

为 R^6_{++} 上的几何凸函数,由第三章推论 5.2 即知.

第六节 几何凸函数与 *Hölder* 不等式

在本节中,要阐述几何凸函数与 *Hölder* 不等式的关系,先介绍一下由杨定华先生给出的 *Hölder* 不等式的一个证明方法.

定理 6.1(*Hölder* 不等式) 设 $x_i, y_i \in R_+ (i = 1, 2, \cdots, n)$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,则有

$$(x_1^p + x_2^p \cdots + x_n^p)^{\frac{1}{p}} (y_1^q + y_2^q \cdots + y_n^q)^{\frac{1}{q}} \geq x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

证明 设 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n_{++}$, $x_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是几何凸函数,由推论 4.5 知 n 元函数 $f(x) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ 在 $(0, +\infty)^n$ 上也是几何凸函数,因此

$$[f(x^p)]^{\frac{1}{p}} [f(y^q)]^{\frac{1}{q}} \geq f(xy),$$

整理即知定理对于 $x_i, y_i \in R_{++} (i = 1, 2, \cdots, n)$ 成立,至于对 $x_i, y_i \in R_+ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 的情形,只要某些 x_i, y_i 取极限即可.

由于两几何凸函数之和仍为几何凸函数的证明中,用到了 *Hölder* 不等式,为了避免循环论证,杨定华先生用本章定义 3.1 的(ⅰ)来证 $f(x) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ 的几何凸性的.其实 $f(x) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ 的几何凸性的也可用本章的定理 5.2 来证明,因相对应的矩阵为:

$$\begin{pmatrix} \frac{f}{x_1}-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \frac{f}{x_2}-1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & & \frac{f}{x_n}-1 \end{pmatrix}, \qquad (6.1)$$

只要证其为半正定阵即可,即只要证其所有顺序主子式为非负,先考虑其 n 阶顺序主子式.(6.1)式中每一行减去第一行,得

$$\begin{pmatrix} \frac{f}{x_1}-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -\frac{f}{x_1} & \frac{f}{x_2}\cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{f}{x_1} & 0 & \cdots & \frac{f}{x_n} \end{pmatrix},$$

再第一列加上第二列的 $\frac{x_2}{x_1}$ 倍, 第一列加上第三列的 $\frac{x_3}{x_1}$ 倍,…,得

$$\begin{pmatrix} \frac{f}{x_1}-\frac{x_2}{x_1}-\cdots-\frac{x_n}{x_1}-1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & \frac{f}{x_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{f}{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & \frac{f}{x_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{f}{x_n} \end{pmatrix},$$

由于上述几个行变换没有改变(6.1)的行列式的值,所以(6.1)的行列式为 0,同样可知其其他二阶以上顺序主子式均为零,故 $x_1+x_2+\cdots+x_n$ 为几何凸函数.

本章定义 3.1 的(ⅱ)中的不等式为:

$$f(x^\alpha x^\beta) \le f^\alpha(x)f^\beta(y),$$

即

$$f(x_1^\alpha y_1^\beta, x_2^\alpha y_2^\beta, \cdots, x_n^\alpha y_n^\beta) \le [f(x_1,x_2,\cdots,x_n)]^\alpha \cdot [f(y_1,y_2,\cdots,y_n)]^\beta, \qquad (6.2)$$

将 x_i^α, y_i^β 分别用 $x_i, y_i (i=1,2,\cdots,n)$ 替代,则有

$$f(x_1y_1, x_2y_2, \cdots, x_ny_n) \\ \leq [f(x_1^{\frac{1}{\alpha}}, x_2^{\frac{1}{\alpha}}, \cdots, x_n^{\frac{1}{\alpha}})]^\alpha \cdot [f(y_1^{\frac{1}{\beta}}, y_2^{\frac{1}{\beta}}, \cdots, y_n^{\frac{1}{\beta}})]^\beta, \tag{6.3}$$

此时我们与 ***Hölder*** 不等式相比较,就会发现几何凸函数的定义是 ***Hölder*** 不等式在某种意义上的推广!也揭示了 ***Hölder*** 不等式的本质,即 ***Hölder*** 不等式所以成立,是因为 $x_1+x_2+\cdots+x_n$ 在 $(0,+\infty)^n$ 上是几何凸函数.所以用 ***Hölder*** 不等式解决的问题,也能用几何凸函数的方法解决.

设 $x_i, y_i>0, i=1,2,\cdots,n$,当 f 在 $(0,+\infty)^n$ 上是几何凹函数时,有

$$f(x_1^\alpha y_1^\beta, x_2^\alpha y_2^\beta, \cdots, x_n^\alpha y_n^\beta) \\ \geq [f(x_1, x_2, \cdots, x_n)]^\alpha \cdot [f(y_1, y_2, \cdots, y_n)]^\beta, \tag{6.4}$$

和

$$f(x_1y_1, x_2y_2, \cdots, x_ny_n) \\ \geq [f(x_1^{\frac{1}{\alpha}}, x_2^{\frac{1}{\alpha}}, \cdots, x_n^{\frac{1}{\alpha}})]^\alpha \cdot [f(y_1^{\frac{1}{\beta}}, y_2^{\frac{1}{\beta}}, \cdots, y_n^{\frac{1}{\beta}})]^\beta, \tag{6.5}$$

下面的定理 6.2 为文[44]中的主要结果,下用上述方法来证明,显然这里的证明简单得多.

正数 a, b 的广义对数平均 $S_r(a,b)$ 定义为([5]的 P41):

$$S_r(a,b)=\begin{cases}\left(\dfrac{b^r-a^r}{r(b-a)}\right)^{\frac{1}{r-1}}, & r\neq 0,1, a\neq b,\\ \dfrac{b-a}{\ln b-\ln a}, & r=0, a\neq b,\\ \dfrac{1}{e}\left(\dfrac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}, & r=1, a\neq b,\\ a, & a=b,\end{cases}$$

定理 6.2 设 $p>1, \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1, a_1, a_2, b_1, b_2>0$,则

(ⅰ)当 $r>-1$ 时,有

$$S_r(a_1b_1, a_2b_2)\leq [S_r(a_1^p, a_2^p)]^{\frac{1}{p}}\cdot [S_r(b_1^q, b_2^q)]^{\frac{1}{q}}.$$

(ⅱ)当 $r<-1$ 时,有

$$S_r(a_1b_1, a_2b_2)\geq [S_r(a_1^p, a_2^p)]^{\frac{1}{p}}\cdot [S_r(b_1^q, b_2^q)]^{\frac{1}{q}}.$$

证明 注意(6.3)式和(6.5)式,欲证本命题,只要讨论函数 S_r 在 R_{++}^2 的几何凸性即可.

设 $r\neq 0,1$,先讨论

$$F_r=\begin{cases}\dfrac{b^r-a^r}{r(b-a)}, a\neq b,\\ ra^{r-1}, a=b,\end{cases}$$

在 R^2_{++} 的几何凸性. 利用洛必塔法则可证 $\dfrac{\partial F_r}{\partial a}$, $\dfrac{\partial F_r}{\partial b}$, $\dfrac{\partial^2 F_r}{\partial a^2}$, $\dfrac{\partial^2 F_r}{\partial b^2}$, $\dfrac{\partial^2 F_r}{\partial a\partial b}$,

$\dfrac{\partial^2 F_r}{\partial b\partial a}$,都存在且连续(详细过程在此略);此时当 $a\neq b$ 时,

$$\frac{\partial F_r}{\partial a}=\frac{(r-1)a^r-ra^{r-1}b+b^r}{r(b-a)^2}, \frac{\partial F_r}{\partial b}=\frac{(r-1)b^r-rb^{r-1}a+a^r}{r(b-a)^2},$$

$$\frac{\partial^2 F_r}{\partial b^2}=\frac{(-r^2-r+2)a^r+(2r^2-3r)a^{r-1}b-(r^2-r)a^{r-2}b^2}{r(b-a)^3}$$
$$+\frac{(r^2-r)a^{r-1}b-2b^r}{r(b-a)^3},$$

$$\frac{\partial^2 F_r}{\partial b^2}=\frac{(r^2+r-2)b^r+(-2r^2+3r)b^{r-1}a+(r^2-r)b^{r-2}a^2}{r(b-a)^3}$$
$$+\frac{(-r^2+r)b^{r-1}a+2a^r}{r(b-a)^3}$$

$$\frac{\partial^2 F_r}{\partial a\partial b}=\frac{\partial^2 F_r}{\partial a\partial b}=\frac{(2-r)a^r+(r-2)b^r+ra^{r-1}b-rab^{r-1}}{r(b-a)^3}$$

可证此时相对应定理 5.2 的矩阵为

$$r^2\begin{pmatrix}\dfrac{b}{a}h(a,b) & -h(a,b)\\ -h(a,b) & \dfrac{a}{b}h(a,b)\end{pmatrix}, \tag{6.6}$$

其中

$$h(a,b)=a^{2r}-r^2a^{r+1}b^{r-1}+(2r^2-2)a^rb^r-r^2a^{r-1}b^{r+1}+b^{2r},$$
$$h(a,b)=r^2(b-a)^2\left[\left(\frac{b^r-a^r}{r(b-a)}\right)^2-a^{r-1}b^{r-1}\right].$$

又利用[5]中第 41 页的知识知: S_r 是 r 的严格递增函数,且 $S_{-1}=\sqrt{ab}$,所以当 $r>1$ 时,

$$\left(\frac{b^r-a^r}{r(b-a)}\right)^{\frac{1}{r-1}}\geq\sqrt{ab},$$
$$\Rightarrow\left(\frac{b^r-a^r}{r(b-a)}\right)^2\geq a^{r-1}b^{r-1},$$

$h(a,b)$为正；同理可证 当$-1<r<0$，或$0<r<1$时，$h(a,b)$为负；当$r<-1$时，$h(a,b)$为正.考虑(6.6)的顺序主子式知：当$r>1$时，F_r为几何凸函数；当$-1<r<0$，或$0<r<1$时，F_r为几何凹函数；当$r<-1$时，F_r几何凸函数.再由S_r的表达式中的指数的正负性，函数S_r与F_r的关系，及本章定理3.1和推论3.2知：当$r>1$时，S_r为几何凸函数；当$-1<r<0$，或$0<r<1$时，S_r为几何凸函数；当$r<-1$时，S_r为几何凹函数，定理得证.

当$r=0$或$r=1$时，由函数的连续性知定理成立.

定理6.3　正数a,b的单参数平均定义如下([5]的P42)：

$$J_p(a,b)=\begin{cases}\dfrac{p(b^{p+1}-a^{p+1})}{(p+1)(b^p-a^p)}, a\neq b \\ a, \qquad a\neq b\end{cases},\quad p\neq 0,-1,$$

则

(ⅰ)当$-\frac{1}{2}<p<0$或$p>0$时，有

$$J_p(a_1b_1,a_2b_2)\leq[J_p(a_1^{\frac{1}{\alpha}},a_2^{\frac{1}{\alpha}})]^\alpha\cdot[J_p(b_1^{\frac{1}{\beta}},b_2^{\frac{1}{\beta}})]^\beta.$$

(ⅱ)当$p<-1$或$-1<p<-\frac{1}{2}$时，有

$$J_p(a_1b_1,a_2b_2)\geq[J_p(a_1^{\frac{1}{\alpha}},a_2^{\frac{1}{\alpha}})]^\alpha\cdot[J_p(b_1^{\frac{1}{\beta}},b_2^{\frac{1}{\beta}})]^\beta.$$

证明　对定理6.2证明中的函数F_r中的a,b分别用a^p,b^p替代，再令$r=\frac{p+1}{p}$，即得函数J_p，由F_r的几何凸性，及几何凸函数的定义可知：当$\frac{p+1}{p}>1$时，J_p为几何凸函数；当$0<\frac{p+1}{p}<1$或$-1<\frac{p+1}{p}<0$时，J_p为几何凹函数；当$\frac{p+1}{p}<-1$时，J_p几何凸函数，由此不难知道定理6.3成立.

第七节　利用几何控制证明不等式

引理7.1　设$a_1,a_2,\cdots,a_n$都为正，$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}=s$，则$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$对数控制$(s,s,\cdots,s)$.

证明　不妨设$a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n$，考虑向量$(\ln a_1,\ln a_2,\cdots,\ln a_n)$，由$\prod_{i=1}^n a_i=s^n(s>0)$知，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\ln a_i=\ln s$，再由[4]的第5页的命题1.4($e$)知

$$(\ln a_1, \ln a_2, \cdots, \ln a_n) \succ (\ln s, \ln s, \cdots, \ln s),$$

当 $1 \leq k \leq n-1$ 时，有

$$\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_k \geq k \ln s$$

$$a_1 a_2 \cdots a_k \geq s^k,$$

再考虑到 $\prod_{i=1}^{n} a_i = s^n$，引理 7.1 得证.

定理 7.1 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都为正，求证

$$a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n \geq n a_1 a_2 \cdots a_n.$$

证明 因 $a_1^n, a_2^n, \cdots, a_n^n$ 在 $(0, +\infty)$ 上为几何凸函数，根据推论 4.5，$a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n$ 在 $(0, +\infty)^n$ 上为几何凸函数，由引理 7.1 有

$$a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n \geq s^n + s^n + \cdots + s^n = n a_1 a_2 \cdots a_n.$$

这个的定理证明方法有很多，但这是最简单的一种.

对于 *Octogon Mathematical Magazine* 上的 *OQ*1263，这里介绍它的下界.

定理 7.3 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n > 0, \max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} < 1, 0 < k < n$，$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} = s$，则

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots \leq i_k} \frac{1}{1 - a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k}} \geq \frac{C_k^n}{1 - s^k}.$$

证明 因为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 在 $(0,1)$ 上都是几何凸函数，所以 $1 - a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k}$ 是 $(0,1)^n$ 上的几何凹函数，$\frac{1}{1 - a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k}}$ 是 $(0,1)^n$ 上的几何凸函数，$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k} \frac{1}{1 - a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k}}$ 是 $(0,1)^n$ 上的几何凸函数，由此即知所述不等式成立.

定理 7.4[37] 设 $x_1 > 0, x_2 > 0, \cdots, x_n > 0, t > 0$，则有

$$\left[\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} + 1\right]^t + 1 \leq \prod_{i=1}^{n} \left[(x_i + 1)^t + 1\right]^{\frac{1}{n}}.$$

证明 因 x_i，1 在 $(0, +\infty)$ 上为几何凸函数，所以 $x_i + 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上为几何凸函数，由第二章的定理 2.7 有 $(x_i + 1)^t + 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上为几何凸函数，进而 $\prod_{i=1}^{n} [(x_i + 1)^t + 1]^{\frac{1}{n}}$ 在 $(0, +\infty)^n$ 上为几何凸函数，再由引理 7.1 即得证.

定理 7.5[38]　设 $x_1>0,x_2>0,\cdots,x_n>0,t\in R,\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}=s$,则有

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i^t)\geq(1+s^t)^n$$

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i^{-t}+x_i^t)\geq(s^{-t}+s^t)^n \tag{7.1}$$

证明　不难证明 $\prod_{i=1}^{n}(1+x_i^t)$ 和 $\prod_{i=1}^{n}(x_i^{-t}+x_i^t)$ 在 $(0,+\infty)^n$ 上都是几何凸函数,从而结论成立.

在几何凸函数的理论下,定理 7.4 和定理 7.5 都不难推广.如在定理 7.5 的条件下,设 a,b,c,d 都为正,可把(7.1)式推广为

$$\prod_{i=1}^{n}(ax_i^{-bt}+cx_i^{dt})\geq(as^{-bt}+cs^{dt})^n.$$

定理 7.6　设 $\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}>1,\prod_{i=1}^{n}a_i=s^n$,则

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{a_i}\right)\leq\left(1-\frac{1}{s}\right)^n. \tag{7.2}$$

证明　因 $\frac{1}{a_i}(i=1,2,\cdots,n)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是几何凸函数,由上一节定理 2.2 的(ⅳ)知 $1-\frac{1}{a_i}$ 在 $(1+\infty)$ 上为几何凹函数,$\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{a_i}\right)$ 在 $(1,+\infty)^n$ 上为几何凹函数,由引理 7.1 即知不等式(7.2)成立.

(7.2)式的左边取对数后是凹函数,用凹函数的性质得到的结果比这里要弱.

定理 7.7[5]　设 $a_i>0,i=1,2,\cdots n,s=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i},1\leq k\leq n$,则

$$\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k}\frac{a_{i_1}+a_{i_2}\cdots+a_{i_k}}{a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}}\geq k\binom{n}{k}s^{1-k}$$

证明　对任一组 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_k}$,因 $a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_k}$ 在 $(0,+\infty)^k$ 上为几何凸的,$a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}$ 在 $(0,+\infty)^k$ 上为几何凹的,所以 $\frac{a_{i_1}+a_{i_2}\cdots+a_{i_k}}{a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}}$ 在 $(0,+\infty)^k$ 上为几何凸的,$\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k}\frac{a_{i_1}+a_{i_2}\cdots+a_{i_k}}{a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}}$ 在 $(0,+\infty)^n$ 上为几何凸函数,由引理 7.1 即知定理 7.7 成立.

第八节 若干凸函数不等式的移植

本节主要介绍几个与凸函数不等式平行的不等式，其中有关的凸函数知识，请参阅本书第一章第四节内容.本节的结果是李世杰先生与作者共同得到的.

定理 8.1 设 f 是 R_{++} 上的几何凸函数，则对于 $0<\alpha\leq\beta,x\geq1$，有

$$(f(x^{\frac{1}{\beta}}))^{\beta}\leq f^{\beta-\alpha}(1)\cdot(f(x^{\frac{1}{\alpha}}))^{\alpha}.$$

证明 由于 f 的连续性，不妨假设 α,β 为有理数，且设 $\alpha=\frac{m_1}{n},\beta=\frac{m_2}{n}$，其中 m_1,m_2,n 为正整数，$m_1\leq m_2$，则我们只要证明

$$(f(x^{\frac{n}{m_2}}))^{m_2}\leq f^{m_2-m_1}(1)\cdot(f(x^{\frac{n}{m_1}}))^{m_1},$$

考虑向量 $(\underbrace{x^{\frac{n}{m_1}},x^{\frac{n}{m_1}},\cdots,x^{\frac{n}{m_1}}}_{m_1},\underbrace{1,1,\cdots,1}_{m_2-m_1})\in R_{++}^{m_2}$ 和 $(x^{\frac{n}{m_2}},x^{\frac{n}{m_2}},\cdots,x^{\frac{n}{m_2}})\in R_{++}^{m_2}$

因 $x\geq1,\frac{n}{m_1}\geq\frac{n}{m_2}$，所以 $x^{\frac{n}{m_1}}\geq x^{\frac{n}{m_2}}$，易知 $(\underbrace{x^{\frac{n}{m_1}},x^{\frac{n}{m_1}},\cdots,x^{\frac{n}{m_1}}}_{m_1},\underbrace{1,1,\cdots,1}_{m_2-m_1})$ 指数控制 $(x^{\frac{n}{m_2}},x^{\frac{n}{m_2}},\cdots,x^{\frac{n}{m_2}})$，根据推论 4.1 知：$f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_{m_2})$ 为 $R_{++}^{m_2}$ 上的几何凸函数，又由定理 5.3 知命题成立.

定理 8.2 若 $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的几何凸函数，$[\alpha,\beta]\subseteq[a,b]$，$x_i\in[\alpha,\beta]$，$i=1,2,\cdots,n$，则当 $t=\frac{\prod_{i=1}^{n}x_i}{\alpha^{n-1}}\in[a,b]$ 时，有

$$\prod_{i=1}^{n}g(x_i)\leq g(t)g^{n-1}(\alpha).$$

证明 不妨设 $\beta\geq x_1\geq x_2\geq\cdots\geq x_n\geq\alpha$，对于向量 $(\frac{\prod_{i=1}^{n}x_i}{\alpha^{n-1}},\alpha,\alpha,\cdots\alpha)\in R_{++}^{n}$ 和 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R_{++}^{n}$，因

$$\frac{\prod_{i=1}^{n}x_i}{\alpha^{n-1}}\geq x_1;\qquad \frac{\prod_{i=1}^{n}x_i}{\alpha^{n-1}}\cdot\alpha\geq x_1x_2;\qquad \cdots;$$

$$\frac{\prod_{i=1}^{n}x_i}{\alpha^{n-1}},\alpha,\alpha,\cdots\alpha=x_1x_2\cdots x_n,$$

所以

$$\ln\left(\frac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{\alpha^{n-1}}, \alpha, \alpha, \cdots, \alpha\right) \succ \ln(x_1, x_2, \cdots, x_n), \tag{8.1}$$

又 $g(x_1)g(x_2)\cdots g(x_n)$ 为 R^n_{++} 上的几何凸函数，再由定理 5.3 知命题成立.

由推论 4.2 知 $g(x_1)+g(x_2)+\cdots+g(x_n)$ 为 R^n_{++} 上的几何凸函数，再由(8.1)式有：

定理 8.3 若 $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的几何凸函数，$[\alpha,\beta]\subseteq[a,b]$，$x_i\in[\alpha,\beta]$，$i=1,2,\cdots,n$，则当 $t=\frac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{\alpha^{n-1}}\in[a,b]$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{n} g(x_i) \le g(t) + (n-1)g(\alpha).$$

定理 8.4 设 $\varphi(x)$ 是区间 $[1,+\infty)$ 上连续的几何凸函数，正项数列 $\{a_k\}$ 单调递增，且 $a_1\geqslant 1$，则有

$$\phi(1)\prod_{k=1}^{+\infty}\frac{\phi(a_k^k)}{\phi(a_k^{k-1})} \le \phi\left(\prod_{k=1}^{+\infty} a_k\right).$$

证明 先证对任正整数 n，有

$$\phi(1)\prod_{k=1}^{+\infty}\phi(a_k^k) \le \phi\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\prod_{k=1}^{n}\phi(a_k^{k-1}), \tag{8.2}$$

由于 $1\leq a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n$，显然有

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k, a_n^{n-1}, a_n^{n-2}, \cdots, a_2, 1\right) \succ \ln(a_n^n, a_{n-1}^{n-1}, \cdots, a_2^2, a_1, 1),$$

又 $\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)$ 为 R^n_{++} 上的几何凸函数，再由定理 5.3 知(8.2)成立，令 $n\to+\infty$ 即知定理 8.4 成立.

定理 8.5 设 $a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n\geq 1$，且 f 是区间 $[1,a_1]$ 上的几何凸函数，$f(1)\leq 1$，则

$$\frac{f(a_1)f(a_3)\cdots}{f(a_2)f(a_4)\cdots} \ge f\left(\frac{a_1a_3\cdots}{a_2a_4\cdots}\right), \tag{8.3}$$

当 n 为偶数时，条件 $f(1)\leq 1$ 不能去掉，但当 n 为奇数时，条件 $f(1)\leq 1$ 可省略.

证明 当 n 为奇数时，命题化为

$$f(a_1)f(a_3)\cdots f(a_n) \ge f(a_2)f(a_4)\cdots f(a_{n-1})f\left(\frac{a_1a_3\cdots a_n}{a_2a_4\cdots a_{n-1}}\right),$$

因

$$a_1 \geq a_2 \text{ 或 } a_1 \geq \frac{a_1 a_3 \cdots a_n}{a_2 a_4 \cdots a_{n-1}},$$

$$a_1 a_3 \geq a_1 \geq a_2 \text{ 或 } a_1 a_3 \geq a_2 \frac{a_1 a_3 \cdots a_n}{a_2 a_4 \cdots a_{n-1}},$$

$$\cdots$$

$$a_1 a_3 \cdots a_n = a_2 a_4 \cdots a_{n-1} \frac{a_1 a_3 \cdots a_n}{a_2 a_4 \cdots a_{n-1}},$$

易知 $\ln(a_1, a_3, \cdots, a_n) \succ \ln(a_2, a_4, \cdots, a_{n-1}, \frac{a_1 a_3 \cdots a_n}{a_2 a_4 \cdots a_{n-1}})$，根据定理知 $f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_{\frac{n+1}{2}})$ 为 $R_{++}^{\frac{n+1}{2}}$ 上的几何凸函数，再由定理知(8.3)式成立.

当 n 为偶数时，命题化为

$$f(a_1)f(a_3)\cdots f(a_{n-1}) \geq f(a_2)f(a_4)\cdots f(a_n)f(\frac{a_1 a_3 \cdots a_{n-1}}{a_2 a_4 \cdots a_n})$$

与以上证明类似，有

$$\ln(a_1, a_3, \cdots, a_{n-1}, 1) \succ \ln(a_2, a_4, \cdots, a_n, \frac{a_1 a_3 \cdots a_n}{a_2 a_4 \cdots a_{n-1}}),$$

由定理知(8.3)式成立.

定理 8.5 有以下推广：

定理 8.6 设 $f(x)$ 是 $[1, a_1] \subseteq R_{++}$ 上的几何凸函数，$f(1) \leq 1$ 且 $1 \leq a_n \leq \cdots \leq a_2 < a_1$，$0 \leq p_n \leq \cdots \leq p_1 \leq 1$，则有

$$\frac{f^{p_1}(a_1) f^{p_3}(a_3) \cdots}{f^{p_2}(a_2) f^{p_4}(a_4) \cdots} \geq f(\frac{a_1^{p_1} a_3^{p_3} \cdots}{a_2^{p_2} a_4^{p_4} \cdots}).$$

证明 当 n 为奇数时，命题化为

$$\frac{f^{p_1}(a_1) f^{p_3}(a_3) \cdots f^{p_n}(a_n)}{f^{p_2}(a_2) f^{p_4}(a_4) \cdots f^{p_{n-1}}(a_{n-1})} \geq f(\frac{a_1^{p_1} a_3^{p_3} \cdots a_n^{p_n}}{a_2^{p_2} a_4^{p_4} \cdots a_{n-1}^{p_{n-1}}}),$$

由 f 的连续性知，可设 $p_i = \frac{m_i}{m}(i = 1, 2, \cdots, n)$，其中 $0 \leq m_n \leq \cdots \leq m_2 \leq m_1 \leq m$，只要证

$$\frac{f^{m_1}(a_1) f^{m_3}(a_3) \cdots f^{m_n}(a_n)}{f^{m_2}(a_2) f^{m_4}(a_4) \cdots f^{m_{n-1}}(a_{n-1})} \geq \left[f\left(\frac{a_1^{\frac{m_1}{m}} a_3^{\frac{m_3}{m}} \cdots a_n^{\frac{m_n}{m}}}{a_2^{\frac{m_2}{m}} a_4^{\frac{m_4}{m}} \cdots a_{n-1}^{\frac{m_{n-1}}{m}}} \right) \right]^m,$$

记 $t = m - m_1 + m_2 - \cdots + m_{n-1} - m_n \geq 0$，由 $f(1) \leq 1$ 知只要证

$$f^t(1)\frac{f^{m_1}(a_1)f^{m_3}(a_3)\cdots f^{m_n}(a_n)}{f^{m_2}(a_2)f^{m_4}(a_4)\cdots f^{m_{n-1}}(a_{n-1})}\geq\left[f\left(\frac{a_1^{\frac{m_1}{m}}a_3^{\frac{m_3}{m}}\cdots a_n^{\frac{m_n}{m}}}{a_2^{\frac{m_2}{m}}a_4^{\frac{m_4}{m}}\cdots a_{n-1}^{\frac{m_{n-1}}{m}}}\right)\right]^m,$$

下面只要证 $(\underbrace{a_1,\cdots,a_1}_{m_1},\underbrace{a_3,\cdots,a_3}_{m_3},\cdots,\underbrace{a_n,\cdots,a_n}_{m_n},\underbrace{1,\cdots,1}_{t})$ 对数控制，

$(\underbrace{a_2,\cdots,a_2}_{m_2},\cdots,\underbrace{a_{n-1},\cdots,a_{n-1}}_{m_{n-1}},\underbrace{\frac{a_1^{\frac{m_1}{m}}\cdots a_n^{\frac{m_n}{m}}}{a_2^{\frac{m_2}{m}}\cdots a_{n-1}^{\frac{m_{n-1}}{m}}},\cdots,\frac{a_1^{\frac{m_1}{m}}\cdots a_n^{\frac{m_n}{m}}}{a_2^{\frac{m_2}{m}}\cdots a_{n-1}^{\frac{m_{n-1}}{m}}}}_{m})$，和 $f(x_1)f(x_2)$ $\cdots f(x_{m_2+m_4+\cdots+m_{n-1}+m})$ 为 $R_{++}^{m_2+m_4+\cdots+m_{n-1}+m}$ 上的几何凸函数即可，详细过程从略.

当 n 为偶数时，记 $t=m-m_1+m_2-\cdots-m_{n-1}+m_n\geq 0$，也只要证

$$f^t(1)\frac{f^{m_1}(a_1)f^{m_3}(a_3)\cdots f^{m_{n-1}}(a_{n-1})}{f^{m_2}(a_2)f^{m_4}(a_4)\cdots f^{m_n}(a_n)}$$

$$\geq\left[f\left(\frac{a_1^{\frac{m_1}{m}}a_3^{\frac{m_3}{m}}\cdots a_{n-1}^{\frac{m_{n-1}}{m}}}{a_2^{\frac{m_2}{m}}a_4^{\frac{m_4}{m}}\cdots a_n^{\frac{m_n}{m}}}\right)\right]^m,$$

其它的都类似证明了，在此略.

从上定理证明过程来看，实际上已证明了下面这个定理.

定理 8.7 设 $a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n\geq 1,0\leq p_n\leq\cdots\leq p_1\leq 1$，且 f 是区间 $[1,a_1]$ 上的几何凸函数，则

$$f\left(\frac{a_1^{p_1}a_3^{p_3}\cdots}{a_2^{p_2}a_4^{p_4}\cdots}\right)\leqslant f^\alpha(1)\frac{f^{p_1}(a_1)f^{p_3}(a_3)\cdots}{f^{p_2}(a_2)f^{p_4}(a_4)\cdots},$$

其中 $\alpha=1-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}p_k$.

定理 8.8 设 f 是 $[a,b]$ 上的几何凸函数，且 f 在区间端点的单侧导 $f'_+(a),f'_-(b)$，数皆存在(有限数)，则存在常数 M，使对任得意 x,y，当 $a\leq x\leq y\leq b$ 时，有

$$\left(\frac{x}{y}\right)^M\leq\frac{f(x)}{f(y)}\leq\left(\frac{y}{x}\right)^M.$$

证明 显然 $y=\ln f(e^x)$ 在 $[\ln a,\ln b]$ 上连续，下面先证 $y'_+(\ln a)$，$y'_-(\ln b)$ 存在，

$$y'_+(\ln a)=\lim_{t\to\ln a+0}\frac{y(t)-y(\ln a)}{t-\ln a}$$

$$= \lim_{t \to \ln a + 0} \frac{\ln f(e^t) - \ln f(a)}{t - \ln a},$$

令 $e^t = x$,则

$$y_+'(\ln a) = \lim_{x \to a+0} \frac{\ln f(x) - \ln f(a)}{\ln x - \ln a}$$

$$= \lim_{x \to a+0} \frac{x-a}{\ln x - \ln a} \cdot \frac{1}{x-a} \cdot \ln \frac{f(x)}{f(a)}$$

$$= \lim_{x \to a+0} a \ln\left(1 + \frac{f(x)-f(a)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{x-a}}$$

$$= \lim_{x \to a+0} a \ln\left[\left(1 + \frac{f(x)-f(a)}{f(a)}\right)^{\frac{f(a)}{f(x)-f(a)}}\right]^{\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)f(a)}}.$$

$$= a \ln e^{\frac{f_+'(a)}{f(a)}} = a \frac{f_+'(a)}{f(a)},$$

同理 $y_-'(\ln b)$也存在,由第二章的定理 3.1 及第一章的定理 4.9 知:存在常数 M,使得对任意的 $x, y \in [\ln a, \ln b]$,有

$$|\ln f(e^x) - \ln f(e^y)| \leq M |x - y|,$$

即对使得对任意的 $x, y \in [a, b]$,有

$$|\ln f(x) - \ln f(y)| \leq M |\ln x - \ln y|,$$

$$M(\ln x - \ln y) \leq \ln f(x) - \ln f(y) \leq M(\ln y - \ln x)$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^m \leq \frac{f(x)}{f(y)} \leq \left(\frac{y}{x}\right)^M.$$

定理 8.9 设 $\varphi(x)$是定义在$[a,b] \subseteq R_{++}$上连续的几何凸函数,则对于任意的 $x_k \in [a,b], k = 1,2,\cdots,n$,有

$$\prod_{1 \leq k_1 < \cdots < k_m \leq n} \varphi\left(\sqrt[m]{\prod_{j=1}^{m} x_{k_j}}\right) \leq \left\{\left[\prod_{k=1}^{n} \varphi(x_k)\right]^{\frac{n-m}{m-1}} \varphi^n\left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}\right)\right\}^{\frac{1}{m}\binom{n-2}{m-2}}$$

其中 $n \geq 3, 2 \leq m \leq n-1$.

利用第二章的定理 3.1 及第一章的定理 4.8,类似定理 8.8 的证明可证此定理,在此从略.

练　习

1. 已知 $0<x_i<1$，$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}=s$，求证 $\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1-x_i}\geq\frac{ns}{1-s}$.

2. 已知 $0<x_i<1$，$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}=s$，求证 $\prod_{i=1}^{n}\frac{1+x_i}{1-x_i}\geq\left(\frac{1+s}{1-s}\right)^n$.

3. 已知 $x_i>0, i=1,2,\cdots,n$，$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}=s$，求证

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1+x_i}{x_i}\geq\frac{n+ns}{s}.$$

4. 已知 $0<x_i<1$，$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}=s$，求证 $\prod_{i=1}^{n}\frac{1-x_i}{x_i}\leq\left(\frac{1-s}{s}\right)^n$.

5. 在 ΔABC 中，求证 $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leq\left(\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{ABC}\right)\right)^3$.

6. 已知 $x_i>0, i=1,2,\cdots,n$ 求证

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\geq n^2.$$

（注：x_i，$\frac{1}{x_i}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 都为几何凸函数）

7. 设 $\Delta A_1B_1C_1$、$\Delta A_2B_2C_2$ 为两个锐角三角形，它们的内切圆半径、外接圆半径、半周长分别设为 r_1,R_1,s_1 和 r_2,R_2,s_2，则有

$$\begin{aligned}&\tan\sqrt{A_1A_2}+\tan\sqrt{B_1B_2}+\tan\sqrt{C_1C_2}\\ \leq&\sqrt{(\tan A_1+\tan B_1+\tan C_1)(\tan A_2+\tan B_2+\tan C_2)}\\ =&\sqrt{\frac{r_1r_2R_1R_2}{(s_1^2-r_1^2-4r_1R_1-4R_1^2)(s_2^2-r_2^2-4r_2R_2-4R_2^2)}}.\end{aligned}$$

8. 设 $\Delta A_1B_1C_1$、$\Delta A_2B_2C_2$ 为两个三角形，它们的内切圆半径、外接圆半径、半周长分别设为 r_1,R_1,s_1 和 r_2,R_2,s_2，且 $0<\alpha<1$，则有

$$\begin{aligned}&(\text{i})\tan\frac{\sqrt{A_1A_2}}{2}+\tan\frac{\sqrt{B_1B_2}}{2}+\tan\frac{\sqrt{C_1C_2}}{2}\\ \leq&\sqrt{\left(\tan\frac{A_1}{2}+\tan\frac{B_1}{2}+\tan\frac{C_1}{2}\right)\left(\tan\frac{A_2}{2}+\tan\frac{B_2}{2}+\tan\frac{C_2}{2}\right)}\end{aligned}$$

$$=\sqrt{\frac{(r_1+4R_1)(r_2+4R_2)}{s_1 s_2}}.$$

(ⅱ) $\tan\frac{A_1^{\alpha}A_2^{1-\alpha}}{2}+\tan\frac{B_1^{\alpha}B_2^{1-\alpha}}{2}+\tan\frac{C_1^{\alpha}C_2^{1-\alpha}}{2}$

$$\leq\left(\frac{r_1+4R_1}{s_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{r_2+4R_2}{s_2}\right)^{1-\alpha}.$$

9.设 $a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n\geq 1$ 且 f 是区间$[1,a_1]$上的几何凸函数,则当 n 为偶数时,有

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}f(a_i)\geq f\left(\frac{a_1a_3\cdots}{a_2a_4}\right);$$

当 n 为奇数时,

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}f(a_i)\geq f\left(\frac{a_1a_3\cdots}{a_2a_4\cdots}\right)-f(1).$$

10.设 f 是 R_+ 上的几何凸函数,则对于 $0<\alpha\leq\beta,x\geq 1$,求证:

$$\beta\cdot f(x^{\frac{1}{\beta}})\leq(\beta-\alpha)f(1)+\alpha\cdot f(x^{\frac{1}{\alpha}}).$$

11.设 $a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n\geq 1,0\leq p_n\leq\cdots\leq p_1\leq 1,\alpha=1-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}p_k$,且 f 是区间$[1,a_1]$上的几何凸函数,则

$$\alpha\cdot f(1)+p_1f(a_1)+p_3f(a_3)+\cdots\geqslant$$

$$f\left(\frac{a_1^{p_1}a_3^{p_3}\cdots}{a_2^{p_2}a_4^{p_4}\cdots}\right)+p_2f(a_2)+p_4f(a_4)+\cdots.$$

12.[47] 设区间 $I=(0,1]$或$[1,+\infty)$,$x_1,x_2,\cdots x_n\in I$,则

$$2^{n-1}\left(1+\prod_{i=1}^{n}x_i\right)\geq\prod_{i=1}^{n}(1+x_k);$$

$$\prod_{i=1}^{n}x_k+(n-1)\geq\sum_{i=1}^{n}x_k.$$

13.[47] 设 $0<\alpha<1,x_1,x_2,,\cdots,x_n\in(0,\alpha)$,则

$$\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^{n-1}\cdot\left(\alpha^{n-1}-\prod_{i=1}^{n}x_i\right)\leq\prod_{i=1}^{n}(1+x_i).$$

第五章　Schur－几何凸函数

为了扩大几何凸函数应用范围，与凸函数的控制一样，有必要引入 *Schur*－几何凸函数．

第一节　Schur－几何凸函数的定义

定义 1.1　设 $x,y\in E\subseteq R_{++}^n$，$f$ 是定义在 E 上的非负函数，如果当 $\ln x\succ\ln y$ 时，有 $f(x)\geq f(y)$，则称 f 是 E 上的 *Schur*—几何凸函数，简称 S—几何凸函数；如果当 $\ln x\succ\ln y$ 时，有 $f(x)\leq f(y)$，则称 f 是 E 上的 *Schur*—几何凹函数，简称 S—几何凹函数．

定理 1.1　设 $E\subseteq R_{++}^n$，$H=\ln E=\{\ln x\mid x\in E\}$，$f$ 是定义在 E 上的正值函数，则 f 是 E 上的 S—几何凸函数，当且仅当 $\ln f(e^x)$ 是 H 上的 S—凸函数．

证明　当 f 在 E 上是 S—几何凸函数时，任取 $x,y\in H$，$x\succ y$ 时，由于向量 e^x 对数控制 e^y，所以 $f(e^x)\geq f(e^y)$，$\ln f(e^x)\geq\ln f(e^y)$，则 $\ln f(e^x)$ 在 H 是 S—凸函数．

当 $\ln f(e^x)$ 在 H 为 S—凸函数时，任取 $x,y\in E$，$\ln x\succ\ln y$ 时，则有 $\ln f(e^{\ln x})\geq\ln f(e^{\ln y})$，$f(x)\geq f(y)$，所以 f 在 E 上为 S—几何凸函数．

同理可证以下结论：

定理 1.2　设 $E\subseteq R_{++}^n$，$H=\ln E=\{\ln x\mid x\in E\}$，$f$ 是定义在 E 上的正值函数，则 f 在 E 上为 S—几何凹函数，当且仅当 $\ln f(e^x)$ 在 H 为 S—凹函数．

定理 1.3　设函数 f 是对称集 $E(\subseteq R_{++}^n)$ 上的 S—几何凸函数（或 S—几何凹函数），则 f 是 E 上的对称函数．

证明　先证 f 取值为正时的情形，任取 $x\in E$，存在唯一的 $y\in H=\ln E=\{\ln x\mid x\in E\}$，使得 $x=e^y$，此时 $\ln f(e^y)$ 在对称集 $\ln E$ 是 S—凸函数（或 S—凹函数），根据第一章定理 3.4 知 $\ln f(e^y)$ 为对称函数，即对任意置换矩阵 G，有

$$\ln f(e^{yG}) = \ln f(e^y),$$
$$f(e^yG) = f(e^y),$$
$$f(xG) = f(x),$$

故 f 是 E 上的对称函数.

当 f 取值为非负时,设 $c>0$ 为常数,任取 $x,y\in E\subseteq R^n_{++}$,当 $\ln x>\ln y$ 时,因 f 是 S—几何凸函数,故有 $f(x)\geq f(y)$,则

$$f(x)+c\geq f(y)+c,$$

所以 $f(x)+c$ 为取值为正的 E 上的 S—几何凸函数,由以上证明知 $f(x)+c$ 为对称函数,进而 f 是 E 上的对称函数.

定理 1.4 设对称函数 f 在对称的几何凸集 E 上一阶可微,取值为非负,且任取 $x=(x_1,x_2\cdots,x_n)\in E\subseteq R^n_{++}$,有

$$(\ln x_1-\ln x_2)(x_1f_1'-x_2f_2')\geq 0,$$

则 f 是 E 上的 S—几何凸函数;若上式不等号反向,则 f 是 E 上的 S—几何凹函数.

证明 先证 f 取值为正时,$\ln f(e^y)$ 在 $H=\ln E=\{\ln x\mid x\in E\}$ 上为 S—凸函数,因

$$(y_1-y_2)\left[\frac{\partial}{\partial y_1}(\ln f(e^y))-\frac{\partial}{\partial y_2}(\ln f(e^y))\right]$$
$$=(y_1-y_2)\left(\frac{e^{y_1}f_1'}{f(e^y)}-\frac{e^{y_2}f_2'}{f(e^y)}\right),$$

令 $x=e^y$,由于 $f(x)$ 取值为正,所以上式为

$$(\ln x_1-\ln x_2)\left[\frac{x_1f_1'}{f(x)}-\frac{x_2f_2'}{f(x)}\right]\geq 0,$$

因此 $\ln f(e^y)$ 是 S—凸函数,由定理 1.1 知,f 是 E 上的 S—几何凸函数;对于 f 取值非负时,设 $g_n(x)=f(x)+\dfrac{1}{n}$,则

$$(\ln x_1-\ln x_2)(x_1g_1'-x_2g_2')$$
$$=(\ln x_1-\ln x_2)(x_1f_1'-x_2f_2')\geq 0,$$

$g_n(x)$ 为 S—几何凸函数,此时任取 x,y,当 $\ln x>\ln y$ 时,有

$$g_n(x)\geq g_n(y),$$

对 n 取极限即得

$$f(x)\geq f(y),$$

所以 f 为 S—几何凸函数;

当定理中不等号反向时，类似可证 f 为 S—几何凹函数．

由第四章的定理5.2来判别多元几何凸函数是很复杂的，这更显示出定理1.4的应用价值(利用函数的 S—几何凸凹性可以证明和发现大批不等式)．

定理 1.5 (ⅰ)设 $E\subseteq R^n_{++}$，函数 f_1、f_2 在 E 上为 S—几何凸函数，则 f_1+f_2，f_1f_2 在 E 上也是 S—几何凸函数．

(ⅱ)设 $E\subseteq R^n_{++}$，函数 f_1、f_2 是 E 上为 S—几何凹函数，则 f_1+f_2，f_1f_2 也是 S—几何凹函数．

证明 仅证结论(ⅱ)，设 $x,y\in E\subseteq R^n_{++}$，$\ln x\succ\ln y$，由于 $0\le f_1(x)\le f_1(y)$，$0\le f_2(x)\le f_2(y)$，则

$$f_1(x)+f_2(x)\le f_1(y)+f_2(y)$$

和

$$f_1(x)f_2(x)\le f_1(y)f_2(y)$$

成立，f_1+f_2，f_1f_2 也是 S—几何凹函数．

从 S—几何凸函数的定义，易证以下几个结论，详细过程在此略．

定理 1.6 设 S－几何凸(凹)函数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ 在 $E(\subseteq R^n_{++})$ 上有定义，且收敛于连续函数 $f(x)$，则 f 也是 E 上的 S－几何凸(凹)函数．

推论 1.1 设 S－几何凸(凹)函数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ 在 $E\subseteq R^n_{++}$ 上有定义，且 $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}f_i(x)$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$，则 f 也是在 E 上的 S—几何凸(凹)函数．

定理 1.7 设 f 为 $(0,+\infty)$ 上的非负函数，$x_i\in(0,+\infty)$，$i=1,2,\cdots,n$，

(ⅰ)若 f 在 $(0,+\infty)$ 上为单调递增的，则 $f(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ 在 R^n_+ 上为 S－几何凸函数．

(ⅱ)若 f 在 $(0,+\infty)$ 上为单调递减的，则 $f(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ 在 R^n_+ 上为 S－几何凹函数．

证明 仅证(ⅰ)，任取向量 $x,y\in R^n_{++}$，满足 $\ln x\succ\ln y$，因 $x_1+x_2+\cdots+x_n$ 是 R^n_{++} 上的几何凸函数，故有

$$x_1+x_2+\cdots+x_n\ge y_1+y_2+\cdots+y_n,$$

由于 f 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以

$$f(x_1+x_2+\cdots+x_n)\ge f(y_1+y_2+\cdots+y_n),$$

$f(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ 为 S－几何凸函数．

在上面证明中，有以下一个结论.

定理 1.8 任取向量 $x,y\in R^n_{++}$，满足 $\ln x\succ\ln y$，则有

$$x_1+x_2+\cdots+x_n\geq y_1+y_2+\cdots+y_n.$$

第二节 若干不等式的统一证明

本节恒设 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$，$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$s=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}$.

文[5]第 172 页有这样的不等式：

例 1 设 $\alpha>0$，$\beta\in R$，$\beta\neq0$，

（ⅰ）若 $\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}>\frac{\alpha}{\beta}$，则有

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha+a_i)^{-\beta}\leq n(\alpha+s)^{-\beta}.$$

（ⅱ）若 $\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}<\frac{\alpha}{\beta}$，则有

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha+a_i)^{-\beta}\geq n(\alpha+s)^{-\beta}.$$

证明 仅证明（ⅰ）设 $f(a)=\sum_{i=1}^{n}(\alpha+a_i)^{-\beta}$，下证 f 是 $(0,+\infty)^n$ 上的 S - 几何凹函数，因

$$f_1'(a)=-\beta(\alpha+a_1)^{-\beta-1},$$

$$(\ln a_1-\ln a_2)(a_1f_1'-a_2f_2')$$

$$=(\ln a_1-\ln a_2)\beta[-a_1(\alpha+a_1)^{-\beta-1}+a_2(\alpha+a_2)^{-\beta-1}],\quad(2.1)$$

考虑函数 $g(t)=-\beta\cdot t(\alpha+t)^{-\beta-1}$，由于

$$g'(t)=-\beta\cdot(\alpha+t)^{-\beta-1}+\beta(\beta+1)\cdot t(\alpha+t)^{-\beta-2},$$

$$g'(t)=(-\beta\alpha+\beta^2t)(\alpha+t)^{-\beta-2}=\beta^2(t-\frac{\alpha}{\beta})(\alpha+t)^{-\beta-2},$$

所以 $g(t)$ 在 $(\frac{\alpha}{\beta},+\infty)$ 上单调递增，(2.1)式右边非正，所以 f 为 S - 几何凹函数，再由第四章引理 7.1，即得欲证结论.

例 2（Fanky 不等式）[5] （ⅰ）设 $0<a_i\leq\frac{1}{2}$，$i=1,2,\cdots,n$，则

$$\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(1-a_i)\right]^n}{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^n}\leq\frac{\prod_{i=1}^{n}(1-a_i)}{\prod_{i=1}^{n}a_i}.$$

（ⅱ）设$\frac{1}{2}\leq a_i<1, i=1,2,\cdots,n$，则

$$\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(1-a_i)\right]^n}{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^n}\geq\frac{\prod_{i=1}^{n}(1-a_i)}{\prod_{i=1}^{n}a_i}.$$

（ⅲ）设 $1<a_i, i=1,2,\cdots,n$，则

$$\frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i-1)\right]^n}{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^n}\geq\frac{\prod_{i=1}^{n}(a_i-1)}{\prod_{i=1}^{n}a_i}.$$

证明 （ⅰ）设$\frac{1}{a_i}-1=b_i, i=1,2,\cdots,n$，则 $b_i\geq 1(i=1,2,\cdots,n)$，不等式化为

$$\left[\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}a_i}-1\right]^n\leq\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a_i}-1\right),$$

$$\left[\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i+1}}-1\right]^n\leq\prod_{i=1}^{n}b_i, \tag{2.2}$$

设 $f(b)=\left[\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i+1}}-1\right]^n$，则有

$$f'_1(b)=n\left[\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i+1}}-1\right]^{n-1}\frac{-n}{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i+1}\right)^2}\frac{-1}{(b_1+1)^2},$$

$$\begin{aligned}&(\ln b_1-\ln b_2)(b_1f'_1(b)-b_2f'_2(b))\\&\quad=(\ln b_1-\ln b_2)n\left[\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i+1}}-1\right]^{n-1}\end{aligned}$$

$$\cdot \frac{n}{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i+1}\right)^2}\left[\frac{b_1}{(b_1+1)^2}-\frac{b_2}{(b_2+1)^2}\right]$$

$$=(\ln b_1-\ln b_2)\left[\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i+1}}-1\right]^{n-1}$$

$$\cdot \frac{n^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i+1}\right)^2}\frac{(b_2-b_1)(b_1b_2-1)}{(b_1+1)^2(b_2+1)^2}\leq 0, \tag{2.3}$$

所以 f 是 $(1,+\infty)^n$ 上的 S－几何凹函数，因此(2.2)式成立，命题得证.

(ⅱ)因(2.3)式为负，$f(b)$ 在 $(0,1)^n$ 上是 S－几何凸函数.

(ⅲ)设 $1-\frac{1}{a_i}=b_i, i=1,2,\cdots,n$，即可.

例 3[36] 设 $r\geq 2, a_i>0, i=1,2,\cdots,n$，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^r\geq\sum_{i=1}^{n}a_i^r+(n^r-n)s^r.$$

证明 设 $f(a)=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^r-\sum_{i=1}^{n}a_i^r$ 有

$$f_1'(a)=r\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{r-1}-ra_1^{r-1},$$

$$(\ln a_1-\ln a_2)(a_1f_1'(a)-a_2f_2'(a))$$
$$=r(\ln a_1-\ln a_2)\left[(a_1-a_2)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{r-1}-(a_1^r-a_2^r)\right],$$

由于 $(\ln a_1-\ln a_2)(a_1-a_2)\geq 0$，所以

$$(\ln a_1-\ln a_2)(a_1f_1'(a)-a_2f_2'(a))$$
$$\geq r(\ln a_1-\ln a_2)\left[(a_1-a_2)(a_1+a_2)^{r-1}-(a_1^r-a_2^r)\right],$$

利用[41]的定理 1 中的(1)式，上式的右边非负，f 在 $(0,+\infty)^n$ 上为 S—几何凸函数，又 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 对数控制 $(s,s,\cdots,s)$ 由定理 1.4 即知命题为真.

在本书第一章的第三节中提到[3]的第 98 页中的一个结果，其中还记述了另一个结果.

例 4 设 $L(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-y}{\ln x-\ln y}, & \text{当 } x\neq y, x,y>0 \text{ 时}\\ x, & \text{当 } x=y \text{ 时}\end{cases}$，则

$$L(x,y)\geq\sqrt{xy}.$$

证明 第一章的第三节已有

$$\frac{\partial L(x,y)}{\partial x}=\begin{cases}\dfrac{\ln x-\ln y+\dfrac{y}{x}-1}{(\ln x-\ln y)^2}, & x\neq y,x,y>0\\ \dfrac{1}{2}, & x=y\end{cases},$$

同理有

$$\frac{\partial L(x,y)}{\partial y}=\begin{cases}\dfrac{\ln y-\ln x+\dfrac{x}{y}-1}{(\ln x-\ln y)^2}, & x\neq y,x,y>0\\ \dfrac{1}{2}, & x=y\end{cases},$$

当 $x=y$ 时，有

$$(\ln x-\ln y)\left(x\frac{\partial L}{\partial x}-y\frac{\partial L}{\partial y}\right)=0;$$

当 $x\neq y$ 时，有

$$\begin{aligned}&(\ln x-\ln y)\left(x\frac{\partial L}{\partial x}-y\frac{\partial L}{\partial y}\right)\\&=(\ln x-\ln y)\frac{x\ln x-x\ln y+2y-2x-y\ln y+y\ln x}{(\ln x-\ln y)^2},\\&=2\left(\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{\ln x-\ln y}\right),\end{aligned}$$

第一章第三节的例 6 说明上式为非负，所以 $L(x,y)$ 为 S－几何凸函数.有

$$L(x,y)\geq L(\sqrt{xy},\sqrt{xy})=\sqrt{xy}.$$

利用 S—几何凸函数的定义，可以把以上结果推广为

定理 2.1 设 $L(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-y}{\ln x-\ln y}, & 当\ x\neq y,x,y>0\ 时\\ x, & 当\ x=y\ 时\end{cases}$，$\alpha,\beta>0,\alpha+\beta=1$，有

$$L(x,y)\geq L(x^{\alpha}y^{\beta},x^{\beta}y^{\alpha})$$

成立.

例 5(第四章定理 2.5 的证明) 设 $n\geq2,a_i>2r>0,i=1,2,\cdots,n$，则超球体 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^2\leq r^2$ 为几何凸集.

证明 设 $a_i>0, a=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}, x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，由第四章的定理 1.6 知 $[\frac{a}{2},+\infty)^n$ 为几何凸集，先证 $f(x)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2$ 在 $[\frac{a}{2},+\infty)^n$ 上为 S—几何凸函数，因

$$f_1(x)=2(x_1-a),$$

$$\begin{aligned}&(\ln x_1-\ln x_2)(x_1f_1-x_2f_2)\\&=2(\ln x_1-\ln x_2)(x_1-x_2)(x_1+x_2-a)\geq 0.\end{aligned}$$

由定理 1.4 知 f 为 S—几何凸函数，于是任取 $[\frac{a}{2},+\infty)^n$ 中的两点 $A(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $B(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，则有：

$$f(\sqrt{xy})\leq\sqrt{f(x)f(y)},$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{x_iy_i}-a)^2\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-a)^2},\tag{2.4}$$

下证超球体 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^2\leq r^2$ 为几何凸集.

事实上，任取超球体中的二点 $C(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 和，$D(v_1,v_2,\cdots,v_n)$，只要证 C,D 的几何中点 $(\sqrt{u_1v_1},\sqrt{u_2v_2},\cdots,\sqrt{u_nv_n})$ 在超球体 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^2\leq r^2$ 内，即

$$\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{u_iv_i}-a_i)^2\leq r^2,$$

设 $a_i-u_i=c_i, a_i-v_i=d_i, i=1,2,\cdots,n$，只要证

$$\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{(a_i-c_i)(a_i-d_i)}-a_i)^2\leq r^2,\tag{2.5}$$

又 $-r\leq a_i-u_i\leq r, |c_i|\leq r\leqslant a_i$；同理 $|d_i|\leq r\leqslant a_i$，由第四章的引理 2.1 知，要证(2.5)式只要证：

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i-\sqrt{(a_i-|c_i|)(a_i-|d_i|)}\right)^2\leq r^2,$$

由 $a=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 和第四章的引理 2.2 知，只要证

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a-\sqrt{(a-|c_i|)(a-|d_i|)}\right)^2\leq r^2,\tag{2.6}$$

又有 $a-|c_i|>a-r\geq\frac{a}{2}, a-|d_i|>a-r\geq\frac{a}{2}$，设

$$x=\{a-|c_1|,a-|c_2|,\cdots,a-|c_n|\},$$

$$y=\{a-|d_1|,a-|d_2|,\cdots,a-|d_n|\},$$

知 $x,y\in[\frac{a}{2},+\infty)^n$，把 x,y 代入(2.4)式，有

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a-\sqrt{(a-|c_i|)(a-|d_i|)}\right)^2\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}c_i^2\sum_{i=1}^{n}d_i^2}$$

$$=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i-u_i)^2\sum_{i=1}^{n}(a_i-v_i)^2}\le\sqrt{r^2\cdot r^2}=r^2,$$

即(2.6)式得证，从而命题得证.

例 6(王挽澜不等式)[37]

(ⅰ)设 $0<p<1$，则

$$\prod_{i=1}^{n}[(a_i+1)^p-1]\le[(s+1)^p-1]^n;$$

(ⅱ)设 $p>1$，则

$$\prod_{i=1}^{n}[(a_i+1)^p-1]\ge[(s+1)^p-1]^n;$$

(ⅲ)设 $p>0$，则

$$\prod_{i=1}^{n}[(a_i+1)^p+1]\ge[(s+1)^p+1]^n;$$

(ⅳ)设 $p<0,0<a_i<\frac{1}{|p|}(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$\prod_{i=1}^{n}[(a_i+1)^p+1]\le[(s+1)^p+1]^n.$$

其中结论(ⅲ)也就是第四章定理 7.4，其余结论可用定理 1.4 证明，在此从略.

第三节　几个解析不等式

本节恒设 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0,a=(a_1,a_2,\cdots,a_n),s=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}$.

在[33]中第 99 页有一个不等式：设 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0,A=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i$ 则有 $\prod_{i=1}^{n}a_i^{a_i}\ge A^{nA}$. 这种类型的不等式在中学数学竞赛中经常出现.

定理 3.1　(ⅰ)如果 $\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\ge e^{-2}$，则有

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{a_i} \geq s^{ns}.$$

（ⅱ）如果 $\max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \leq e^{-2}$，则不等式反向.

证明 仅证（ⅰ），设 $f(a) = \prod\limits_{i=1}^{n} a_i^{a_i}$，因

$$f'(a) = (\ln a_1 + 1) \prod_{i=1}^{n} a_i^{a_i},$$

$$(\ln a_1 - \ln a_2)(a_1 f_1'(a) - a_2 f_2'(a))$$

$$= (\ln a_1 - \ln a_2)(a_1 \ln a_1 + a_1 - a_2 \ln a_2 - a_2) \prod_{i=1}^{n} a_i^{a_i}, \qquad (3.1)$$

用导数可证 $g(t) = t\ln t + t$ 在 $[e^{-2}, +\infty)$ 为递增，(3.1)式为非负，f 为 $[e^{-2}, +\infty)$ 上的 S—几何凸函数，结论成立.

定理 3.2 （ⅰ）若 $\min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \geq e^2$，则有

$$\prod_{i=1}^{n} \sqrt[a_i]{a_i} \geq \sqrt[s]{s^n}.$$

（ⅱ）若 $\max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \leq e^2$，则不等式反向.

证明 只需证（ⅰ），先证 $f(a) = \prod\limits_{i=1}^{n} \sqrt[a_i]{a_i} = \prod\limits_{i=1}^{n} a_i^{\frac{1}{a_i}}$ 在 $[e^2, +\infty)^n$ 上为 S—几何凸函数，因

$$(x^{\frac{1}{x}})' = x^{\frac{1}{x}} \cdot \ln x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' + \frac{1}{x} \cdot x^{\frac{1}{x}-1} = x^{\frac{1}{x}} \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

所以

$$f_1'(a) = (a_1^{\frac{1}{a_1}})' \prod_{i=2}^{n} a_i^{\frac{1}{a_i}} = \prod_{i=1}^{n} a_i^{\frac{1}{a_i}} \frac{1 - \ln a_1}{a_1^2},$$

$$(\ln a_1 - \ln a_2)(a_1 f_1'(a) - a_2 f_2'(a))$$

$$= (\ln a_1 - \ln a_2) f(a) \left[\frac{1 - \ln a_1}{a_1} - \frac{1 - \ln a_2}{a_2}\right], \qquad (3.2)$$

设 $g(t) = \frac{1 - \ln t}{t}$，则

$$g'(t) = \frac{-\frac{1}{t} \cdot t - 1 + \ln t}{t^2},$$

所以 g 在 $[e^2, +\infty)$ 上单调递增，(3.2)式为非负，根据定理 1.4 和第四章的引理 7.1 即得欲证.

以下定理 3.3－3.5 的证明与定理 3.2 的证明类似，在此从略.

定理 3.3 若 $\max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \le e^{-2}$，则有

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{-x_i} \ge n s^{-s}.$$

定理 3.4 （ⅰ）若 $\min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \ge e^{-4}$ 时，则有

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{\sqrt{a_i}} \ge s^{n\sqrt{s}}.$$

（ⅱ）若 $\max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \le e^{-4}$ 时，则不等式反向.

定理 3.5 （ⅰ）设 $m>0, \max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}<1$，则有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+a_i^m} \le \frac{n}{1+s^m}.$$

（ⅱ）设 $m>0, \min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}>1$，则不等式反向.

证明 设 $f(a)=\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+a_i^m}$，因

$$f_1'(a) = -\frac{m a_1^{m-1}}{(1+a_1^m)^2},$$

$$(\ln a_1 - \ln a_2)(a_1 f_1'(a) - a_2 f_2'(a))$$
$$= m(\ln a_1 - \ln a_2)\left(-\frac{a_1^m}{(1+a_1^m)^2} + \frac{a_2^m}{(1+a_2^m)^2}\right), \tag{3.3}$$

由于

$$\left[-\frac{t^m}{(1+t^m)^2}\right]' = -\frac{m t^{m-1}(1+t^m) - 2m t^{2m-1}}{(1+t^m)^3}$$
$$= \frac{m t^{m-1}(t^m-1)}{(1+t^m)^3},$$

其在(0,1)上为负，(3.3)式也为负，f 在 $(0,1)^n$ 上为 S－几何凹函数；在(1，+∞)为正，(3.3)式也为正，f 在 $(1,+\infty)^n$ 上为 S－几何凸函数，由定理 1.4 和第四章的引理 7.1，结论得证.

下面介绍一下《美国数学月刊》的问题 11031 的证明，这是作者与吴裕东先生一同给出的.

引理 3.1 设 $0<t<1$，则

（ⅰ）$e^t > 1 + 2t + 2t^2 + \frac{4}{3}t^3$.

(ⅱ) $\ln\dfrac{1+t}{1-t}>2t$.

(ⅲ) $$(2t^2-1)e^{4t}>-1-4t-6t^2-\frac{8}{3}t^3+\frac{16}{3}t^4+\frac{64}{5}t^5+\frac{704}{45}t^6. \tag{3.4}$$

证明 (ⅰ)只要利用 e^t 的幂级数展开式即可.

(ⅱ) 考虑函数 $y=\ln\dfrac{1+t}{1-t}-2t$ 在 $[0,+\infty)$ 上的单调性,详细过程在此略.

(ⅲ)设

$$f(t)=(2t^2-1)e^{4t}+1+4t+6t^2+\frac{8}{3}t^3-\frac{16}{3}t^4-\frac{64}{5}t^5-\frac{704}{45}t^6,$$

则

$$f'(t)=(8t^2+4t-4)e^{4t}+4+12t+8t^2-\frac{64}{3}t^3-64t^4-\frac{1408}{15}t^5,$$

$$f''(t)=(32t^2+32t-12)e^{4t}+12+16t-64t^2-256t^3-\frac{1408}{3}t^4,$$

$$\left(\frac{1}{4}f''(t)\right)'=(32t^2+48t-4)e^{4t}+4-32t-192t^2-\frac{1408}{3}t^3,$$

$$\left(\frac{1}{16}f'''(t)\right)'=(32t^2+64t+8)e^{4t}-8-96t-352t^2,$$

$$\left(\frac{1}{128}f^{(4)}(t)\right)'=(16t^2+40t+12)e^{4t}-12-88t,$$

$$\left(\frac{1}{512}f^{(5)}(t)\right)'=(16t^2+48t+22)e^{4t}-22,$$

所以 $f^{(6)}(t)>0$,利用函数的单调性及 $\lim\limits_{t\to0+}f^{(i)}(t)=0,i=1,2,\cdots,5$,知

$$f(t)=(2t^2-1)e^{4t}+1+4t+6t^2+\frac{8}{3}t^3-\frac{16}{3}t^4-\frac{64}{5}t^5-\frac{704}{45}t^6>0,$$

(3.4)式得证.

定理 3.6(问题 11031) 设 $x,y>0$,定义一种"奇特"的平均 $M(x,y)=$

$\ln N(x,y)$，其中

$$N(x,y)=\frac{1+\ln(\sqrt{1+f(x,y)}+\sqrt{f(x,y)})}{1-\ln(\sqrt{1+f(x,y)}+\sqrt{f(x,y)})},$$

和

$$f(x,y)=\frac{(e^{\frac{2(e^x-1)}{e^x+1}}-1)(e^{\frac{2(e^y-1)}{e^y+1}}-1)}{4e^{(\frac{e^x-1}{e^x+1}+\frac{e^y-1}{e^y+1})}},$$

则 $M(x,y)\leqq\sqrt{xy}$.

引理 3.2 设 $g(x,y)=\sqrt{1+f(x,y)}+\sqrt{f(x,y)}$，其中 $(x,y)\in R_+^2$，则 g 为 Schur—几何凹函数.

证明 只要证 $(\ln x-\ln y)(xg_1'-yg_2')\leq 0$ 即可，

$$(\ln x-\ln y)\Big(\frac{xf_1'(x,y)}{2\sqrt{1+f(x,y)}}+\frac{xf_1'(x,y)}{2\sqrt{f(x,y)}}-\frac{yf_2'(x,y)}{2\sqrt{1+f(x,y)}}-\frac{yf_2'(x,y)}{2\sqrt{f(x,y)}}\Big)\leq 0,$$

$$(\ln x-\ln y)(xf_1'(x,y)-yf_2'(x,y))\leq 0, \tag{3.5}$$

再设 $T(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$，则

$$f(x,y)=\frac{1}{4}(e^{T(x)}-e^{-T(x)})(e^{T(y)}-e^{-T(y)}),$$

$$f_1'(x,y)=\frac{1}{4}(e^{T(x)}+e^{-T(x)})(e^{T(y)}-e^{-T(y)})\frac{2e^x}{(e^x+1)^2},$$

于是(3.5)式等价于

$$(\ln x-\ln y)\Big[(e^{T(x)}+e^{-T(y)})(e^{T(y)}-e^{-T(y)})\frac{xe^x}{(e^x+1)^2}-(e^{T(x)}-e^{-T(x)})(e^{T(y)}+e^{-T(y)})\frac{ye^y}{(e^y+1)^2}\Big]\leq 0,$$

不妨设 $x>y$，要证

$$\frac{e^{T(x)}+e^{-T(x)}}{e^{T(x)}-e^{-T(x)}}\cdot\frac{xe^x}{(e^x+1)^2}-\frac{e^{T(y)}+e^{-T(y)}}{e^{T(y)}-e^{-T(y)}}\cdot\frac{ye^y}{(e^y+1)^2}\leq 0,$$

即

$$\frac{e^{2T(x)}+1}{e^{2T(x)}-1}\cdot\frac{xe^x}{(e^x+1)^2}-\frac{e^{2T(y)}+1}{e^{2T(y)}-1}\cdot\frac{ye^y}{(e^y+1)^2}\leq 0, \tag{3.6}$$

设$\frac{e^x-1}{e^x+1}=u$，$\frac{e^y-1}{e^y+1}=v$，则$0<u,v<1$，$x=\ln\frac{1+u}{1-u}$，$y=\ln\frac{1+v}{1-v}$，且$x>y\Leftrightarrow$ $\frac{1+u}{1-u}>\frac{1+v}{1-v}\Leftrightarrow u>v$，所以(3.6)式等价于

$$\frac{e^{2u}+1}{e^{2u}-1}\cdot\frac{\frac{1+u}{1-u}\cdot\ln\frac{1+u}{1-u}}{(\frac{1+u}{1-u}+1)^2}-\frac{e^{2v}+1}{e^{2v}-1}\cdot\frac{\frac{1+v}{1-v}\cdot\ln\frac{1+v}{1-v}}{(\frac{1+v}{1-v}+1)^2}\leq 0,$$

即

$$(1+\frac{2}{e^{2u}-1})\cdot(1-u^2)\cdot\ln\frac{1+u}{1-u}-$$
$$(1+\frac{2}{e^{2v}-1})\cdot(1-v^2)\cdot\ln\frac{1+v}{1-v}\leq 0,$$

所以只要证$h(t)=(1+\frac{2}{e^{2t}-1})\cdot(1-t^2)\cdot\ln\frac{1+t}{1-t}$在$(0,1)$上为单调递减即可，又

$$h'(t)=-2\cdot\frac{1-e^{4t}+(2e^{2t}-t+te^{4t}-2t^2e^{2t})\ln\frac{1+t}{1-t}}{(e^t-1)^2(e^t+1)^2}<0$$

$$\Leftrightarrow 1-e^{4t}+(2e^{2t}-t+te^{4t}-2t^2e^{2t})\ln\frac{1+t}{1-t}>0,$$

利用引理3.1的(ⅰ)(ⅱ)知只要证

$$1-e^{4t}+[2(1-t)^2(1+2t+2t^2+\frac{4}{3}t^3)-t+te^{4t}]\cdot 2t>0,$$

即

$$(2t^2-1)e^{4t}+1+4t+6t^2+4t^3-\frac{8}{3}t^4-8t^5-\frac{16}{3}t^6>0,$$

利用引理3.1的(ⅲ)知只要证

$$\frac{4}{3}t^3+\frac{8}{3}t^4+\frac{24}{5}t^5+\frac{464}{45}t^6>0,$$

而这是显然的.

定理 3.6 (问题 11031)的证明:

$$M(x,y)\le\sqrt{xy},$$
$$\Leftrightarrow N(x,y)\le e^{\sqrt{xy}}$$
$$\Leftrightarrow \ln(\sqrt{1+f(x,y)}+\sqrt{f(x,y)})\le\frac{e^{\sqrt{xy}}-1}{e^{\sqrt{xy}}+1}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{1+f(x,y)}+\sqrt{f(x,y)}\le e^{\frac{e^{\sqrt{xy}}-1}{e^{\sqrt{xy}}+1}},\tag{3.14}$$

由引理 3.2 知$\sqrt{1+f(x,y)}+\sqrt{f(x,y)}$为 Schur—几何凹函数,且 $\ln(x,y)\succ\ln(\sqrt{xy},\sqrt{xy})$,所以

$$\sqrt{1+f(x,y)}+\sqrt{f(x,y)}\le\sqrt{1+f(\sqrt{xy},\sqrt{xy})}+\sqrt{f(\sqrt{xy},\sqrt{xy})}$$

上式易化为(3.14)式.

下面将证明一个有关平均的不等式,并通过它解决成都大学文家金先生的一个猜想.

定理 3.7 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n\ge 0,n\ge 3,A=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i$,则

$$\prod_{i=1}^{n}(nA-a_i)\ge(n-1)^n s^2 A^{n-2}.$$

证明 若 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$中有一个数为 0,则定理显然成立,下设 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in R^n_{++}$,且 $f(a)=\frac{\prod_{i=1}^{n}(nA-a_i)}{(nA)^{n-2}}$,由于$\frac{\partial(nA-a_1)}{\partial a_1}=0$,不难验证

$$\frac{\partial f}{\partial a_1}=(nA-a_1)$$
$$\cdot\frac{\left[\prod_{i=2}^{n}(nA-a_i)\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{nA-a_i}\right]\cdot(nA)^{n-2}-(n-2)\prod_{i=2}^{n}(nA-a_i)(nA)^{n-3}}{(nA)^{2(n-2)}},$$
$$=\prod_{i=1}^{n}(nA-a_i)\cdot\frac{\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{nA-a_i}\cdot(nA)-(n-2)}{(nA)^{n-1}}$$

同理有

$$\frac{\partial f}{\partial a_2}=\prod_{i=1}^{n}(nA-a_i)\cdot\frac{\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq 2}}^{n}\frac{1}{nA-a_i}\cdot(nA)-(n-2)}{(nA)^{n-1}},$$

所以有

$$\begin{aligned}&(\ln a_1-\ln a_2)(a_1f'_1-a_2f'_2)\\
&=(\ln a_1-\ln a_2)\cdot\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(nA-a_i)}{(nA)^{n-1}}\\
&\cdot\left[nA\left(\frac{a_1}{nA-a_1}-\frac{a_2}{nA-a_1}\right)+nA\sum_{i=3}^{n}\frac{1}{nA-a_i}(a_1-a_2)-(n-2)(a_1-a_2)\right]\\
&=(\ln a_1-\ln a_2)(a_1-a_2)\cdot\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(nA-a_i)}{(nA)^{n-1}}\\
&\cdot\left[nA\frac{nA-a_1-a_2}{(nA-a_1)(nA-a_1)}+nA\sum_{i=3}^{n}\frac{1}{nA-a_i}-(n-2)\right]\\
&\geq(\ln a_1-\ln a_2)(a_1-a_2)\cdot\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(nA-a_i)}{(nA)^{n-1}}\cdot\left[nA\sum_{i=3}^{n}\frac{1}{nA-a_i}-(n-2)\right]\\
&\geq(\ln a_1-\ln a_2)(a_1-a_2)\cdot\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(nA-a_i)}{(nA)^{n-1}}\cdot\left[nA\sum_{i=3}^{n}\frac{1}{nA}-(n-2)\right]\\
&=0\end{aligned}$$

所以 f 在 R^n_{++} 上为 $S-$几何凸函数.由 $S-$几何凸函数的定义知

$$\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(nA-a_i)}{(nA)^{n-2}}\geq\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(n-1)s}{(ns)^{n-2}}=\frac{(n-1)^n}{n^{n-2}}s^2,$$

$$\Leftrightarrow\prod_{i=1}^{n}(nA-a_i)\geq\frac{(n-1)^n}{n^{n-2}}s^2(nA)^{n-2},$$

定理 3.7 得证.

众所周知,在三角形中 ΔABC,记 a,b,c 分别为边长,s 半周长,$S(ABC)$ 为其面积,则有这样一个著名结果:

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\leq\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt[3]{abc})^2.$$

为了把其推广到空间 n 边形,成都大学的文家金先生提出以下猜想:

定理 3.8 设 s 为空间 $n(n\geq 3)$ 边形 $A_1A_2\cdots A_nA_1$ 的半周长，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为其边长，则有不等式

$$\sqrt[n+1]{s\cdot\prod_{i=1}^{n}(s-a_i)}\leq\frac{1}{n-1}\cdot\sqrt[n+1]{\frac{n}{n-2}}\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}[(n-3)s+a_i]},\tag{3.15}$$

等号成立当且仅当 n 边形 n 边形为等边 n 边形.

证明 设 $s-a_i=b_i$，$i=1,2,\cdots,n$，则 $b_i>0$，再设 $A=\frac{\sum_{i=1}^{n}b_i}{n}$，$G=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}b_i}$，有

$$\sum_{i=1}^{n}(s-a_i)=\sum_{i=1}^{n}b_i,(n-2)s=nA,$$

(3.15)式化为

$$\sqrt[n+1]{\frac{nA}{n-2}\cdot\prod_{i=1}^{n}b_i}\leq\frac{1}{n-1}\cdot\sqrt[n+1]{\frac{n}{n-2}}\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\left[(n-3)\frac{nA}{n-2}+\frac{nA}{n-2}-b_i\right]},$$

$$\Leftrightarrow nAG^n\leq n\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n+1}\left(\prod_{i=1}^{n}(nA-b_i)\right)^{\frac{n+1}{n}},$$

$$\Leftrightarrow G^{\frac{n^2}{n+1}}\leq n^{\frac{n}{n+1}}\left(\frac{1}{n-1}\right)^n\frac{\prod_{i=1}^{n}(nA-b_i)}{(nA)^{\frac{n}{n+1}}},$$

$$\Leftrightarrow G^{\frac{n^2}{n+1}}\leq n^{\frac{n}{n+1}}\left(\frac{1}{n-1}\right)^n\prod_{i=1}^{n}(nA-b_i)\cdot(nA)^{-\frac{n}{n+1}},$$

由定理 3.7 和其中的 s 的定义，知只要证

$$G^{\frac{n^2}{n+1}}\leq n^{\frac{n}{n+1}}\left(\frac{1}{n-1}\right)^n\frac{(n-1)^n}{n^{n-2}}G^2(nA)^{n-2}\cdot(nA)^{-\frac{n}{n+1}},$$

$$\Leftrightarrow G^{\frac{n^2-2n-2}{n+1}}\leq n^{\frac{-n^2+2n+2}{n+1}}(nA)^{\frac{n^2-2n-2}{n+1}},$$

$$\Leftrightarrow G\leq A,$$

而上式显然成立，等号成立的条件的有关讨论在此略.

第四节 x^y+y^x 与 $2\sqrt{xy}^{\sqrt{xy}}$ 的大小比较

一个众所周知的不等式：设 $x,y>0$ 时，则有

$$x^y + y^x \geq 2\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$$

成立.若设 $s=\sqrt{xy}$,那么 x^y+y^x 与 $2s^s$ 的大小如何？本节将讨论这个问题.

作者曾证明了当$\frac{1}{e}\leq x,y\leq 1$ 时,有 $x^y+y^x\leq 2s^s$ 成立,后把其作为公开问题向成都大学的文家金先生提出。虽然作者又证明了当 $1\leq x,y\leq e$ 时,有 $x^y+y^x\leq 2s^s$ 成立;当 $e^2\leq x,y<+\infty$时, 有 $x^y+y^x\geq 2s^s$ 成立.但本节介绍由成都大学张勇、文家金和王挽澜三位先生利用几何凸函数的性质而得到的结果.为此先引入以下引理.

引理 4.1 (ⅰ)方程

$$t-\frac{1}{e}\ln t-\frac{3}{2}=0 \tag{4.1}$$

在$(0,\frac{1}{e})$上有唯一实根,记为 α,则 $\alpha=0.01779\cdots$.

(ⅱ)方程

$$t(1-\ln t)+\frac{1}{\ln t-1}-1=0 \tag{4.2}$$

在(e,e^2)上的唯一实根,记为 β,则 $\beta=e^{1.389867\cdots}=4.014292\cdots$

证明 (ⅰ)设函数 $f(t)=t-\frac{1}{e}\ln t-\frac{3}{2}$,.,则

$$f'(t)=1-\frac{1}{et},$$

故 $f(t)$在$(0,\frac{1}{e})$上为递减函数,又

$$\lim_{t\to 0+0}f(x)=+\infty,\ \lim_{t\to\frac{1}{e}-0}f(x)=\frac{2}{e}-\frac{3}{2}<0,$$

故由介值定理知断言(i)为真.

(ⅱ)设函数 $g(t)=t(1-\ln t)+\frac{1}{\ln t-1}-1$,则

$$g'(t)=-\ln t-\frac{1}{t(\ln t-1)^2},$$

故 $g(t)$在$(e,+\infty)$上为递减函数, 又

$$\lim_{t\to e+0}g(x)=+\infty,\ \lim_{t\to e^2-0}g(x)=-e^2<0,$$

故由介值定理知断言(ii)也为真.

定理 4.1 设 $x,y>0,s=\sqrt{xy}$,

（ⅰ）若 $x,y\in[\alpha,\frac{1}{e}]$或 $x,y\in[\frac{1}{e},\beta]$，则

$$x^y+y^x\le 2s^s. \tag{4.3}$$

（ⅱ）若 $x,y\in[\beta,+\infty)$，则

$$x^y+y^x\ge 2s^s. \tag{4.4}$$

其中 α,β 的意义见引理 1.

证明 设

$$g(x,y)=x^{y-1}(1-\ln x)-y^{x-1}(1-\ln y),$$

$$h(x,y)=(y-1)\ln x+\ln(1-\ln x)-(x-1)\ln y-\ln(1-\ln y),$$

$$l(x,y)=y-1-x\ln y-\frac{1}{1-\ln x},$$

$$u(x,y)=(y-1)\ln x+\ln(\ln x-1)-(x-1)\ln y-\ln(\ln y-1),$$

$$w(x)=-(x-1-x\ln x+\frac{1}{\ln x-1}),$$

（ⅰ）再设 $f(x,y)=x^y+y^x$ 在 R_{++}^2 上有定义．则

$$f_x'(x,y)=yx^{y-1}+y^x\ln y,$$

$$\begin{aligned}&(\ln x-\ln y)(xf_1'-xf_2')\\&=(\ln x-\ln y)(yx^y+xy^x\ln y-xy^x-yx^y\ln x)\\&=xy(\ln x-\ln y)g(x,y),\end{aligned} \tag{4.5}$$

情形 1：$\alpha\le y\le x\le\frac{1}{e}$时，下面讨论(4.5)式的符号，此时有

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{1}{x}\left(y-1-x\ln y-\frac{1}{1-\ln x}\right)=\frac{1}{x}l(x,y),$$

$$\frac{\partial l}{\partial x}=-\ln y-\frac{1}{x(1-\ln x)^2},$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial x^2}=-\frac{1+\ln x}{x^2(1-\ln x)^3}\ge 0,$$

故 $l(x,y)$关于 x 在区间$(y,\frac{1}{e}]$上严格凸函数，根据凸函数的性质知

$$\sup_{y<x\le\frac{1}{e}}l(x,y)=\max\left\{l(y,y),l(\frac{1}{e},y)\right\}, \tag{4.6}$$

此时若令 $y=e^{-v}$，则 $v>1$，有

$$l(y,y)=y-1-y\ln y-\frac{1}{1-\ln y}$$

$$= e^{-v}(1+v) - \frac{2+v}{1+v} = e^{-v}\frac{2+v}{1+v}\left[\frac{(1+v)^2}{2+v} - e^v\right]$$

$$= e^{-v}\frac{2+v}{1+v}\left[v + \frac{1}{2+v} - \left(1 + v + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{v^n}{n!}\right)\right] < 0,$$

由于 $\alpha \le y \le \frac{1}{e}$，再根据引理 4.1 及其证明过程知

$$l\left(\frac{1}{e}, y\right) = y - \frac{1}{e}\ln y - \frac{3}{2} < 0,$$

从(4.6)式得知 $l(x,y)$ 为负，即 $\frac{\partial h}{\partial x}$ 为负，有

$$h(x,y) \le h(y,y) = 0,$$

(4.5)式为负，根据本章定理 1.4 和第四章的引理 7.1 知(4.3)式成立.

情形 2: $\frac{1}{e} \le y < x \le e$，由 $g(x,y)$ 的连续性知，可设 $x \ne e$，，此时由

$$\frac{\partial l}{\partial y} = 1 - \frac{x}{y} < 0,$$

知 $l(x,y)$ 关于 y 是单调递减的，所以

$$l(x,y) < l\left(x, \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} - 1 + x - \frac{1}{1 - \ln x}$$

$$\overset{(4.7)}{\le} \frac{1}{e} - 1 < 0,$$

其中(4.7)式可参看文献[5]的第 366 页的结论：当 $x > 0$ 时，$\ln x \ge \frac{x-1}{x}$ 成立. 以下的证明类似情形 1，在此略.

情形 3: $e \le y < x \le \beta$. 不妨设 $y \ne e$，此时有

$$u(x,y) = (y-1)\ln x + \ln(\ln x - 1) - (x-1)\ln y - \ln(\ln y - 1),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x}\left(y + \frac{1}{\ln x - 1} - x\ln y - 1\right) = \frac{1}{x}l(x,y),$$

由 $\frac{\partial l}{\partial y} = 1 - \frac{x}{y} < 0$ 知，$-l(x,y)$ 关于 y 为递增的，所以

$$-l(x,y) < -l(x,x) = -\left(x - 1 - x\ln x + \frac{1}{\ln x - 1}\right) = -w(x),$$

由引理 4.1 的证明知，$-w(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上为单调递增函数，于是

$$-w(x) \le -w(\beta) = 0 \Rightarrow -l(x,y) < 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \ge 0 \Rightarrow u(x,y) > u(y,y) = 0$$

$$\Rightarrow -g(x,y)>0\Rightarrow g(x,y)<0,$$

根据本章定理 1.4 和第四章的引理 7.1 知(4.3)式成立.

情形 4: $\frac{1}{e}\le y\le e\le x\le\beta$,由

$$x^{y-1}(1-\ln x)\le 0,\qquad -y^{x-1}(1-\ln y)\le 0,$$

得

$$g(x,y)\le 0.$$

以下的证明类似情形 1,在此从略.

(ⅱ)当 $x>y\ge\beta$ 时,此时有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x}\left(y+\frac{1}{\ln x-1}-x\ln y-1\right)=\frac{1}{x}l(x,y),$$

又

$$\frac{\partial(-l)}{\partial x}=\ln y+\frac{1}{x(1-\ln x)^2}>0$$

$$\Rightarrow -l(x,y)>-l(y,y)=-w(y),$$

由引理 4.1 的证明知,$-w(x)$在$(e,+\infty)$上为单调递增函数,所以

$$-w(y)\ge -w(\beta)=0\Rightarrow -l(x,y)>0$$

$$\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}\le 0\Rightarrow u(x,y)\le u(y,y)=0$$

$$\Rightarrow -g(x,y)\le 0\Rightarrow g(x,y)\ge 0,$$

根据本章定理 1.4 和第四章的引理 7.1 知(4.4)式成立.

下面是定理 4.1 一种多元推广.

定理 4.2 如果 $x_i\ge\beta(i=1,2,\cdots,n,n\ge 2)$,那么有不等式

$$\sum_{1\le i\ne j\le n}x_i^{x_j}\ge n(n-1)[G(x)]^{G(x)}. \tag{4.8}$$

其中 $G(x)=\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}$ 为正实数 $x_1,\cdots,x_n$ 的几何平均,β 由定理 4.1 所定义.

证明 首先证明:若 $a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,且 $G(a)\ge 1$,则

$$\sqrt[n]{a_1^{a_1}\cdots a_n^{a_n}}\ge[G(a)]^{G(a)}. \tag{4.9}$$

其中 $G(a)=\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}$.

不妨设 $a_1\ge\cdots\ge a_n>0$,则 $\ln a_1\ge\cdots\ge\ln a_n$.由切比雪夫不等式及算术—几何不等式得

$$\ln\sqrt[n]{a_1^{a_1}\cdots a_n^{a_n}}=\frac{1}{n}(a_1\ln a_1+\cdots+a_n\ln a_n)$$

$$\geq \frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_n)\cdot\frac{1}{n}(\ln a_1+\cdots+\ln a_n)$$
$$\geq G(a)\ln G(a),$$

即(4.9)成立.

由 $x_i, x_j \geq \beta > 1$、定理 4.1、算术—几何平均不等式及(4.9)得

$$\sum_{1\leq i\neq j\leq n} x_i^{x_j} = \sum_{1\leq i<j\leq n}(x_i^{x_j}+x_j^{x_i}) \geq \sum_{1\leq i<j\leq n} 2(\sqrt{x_i x_j})^{\sqrt{x_i x_j}}$$
$$\geq 2\binom{n}{2}\Big[\prod_{1\leq i<j\leq n}(\sqrt{x_i x_j})^{\sqrt{x_i x_j}}\Big]^{\frac{1}{\binom{n}{2}}}$$
$$\geq n(n-1)\Big[\Big(\prod_{1\leq i<j\leq n}\sqrt{x_i x_j}\Big)^{\frac{1}{\binom{n}{2}}}\Big]^{\left(\prod_{1\leq i<j\leq n}\sqrt{x_i x_j}\right)^{\frac{1}{\binom{n}{2}}}}$$
$$= n(n-1)[G(x)]^{G(x)},$$

即(4.8)成立.

定理 4.3 设 $l(x,y)=y-1-x\ln y-\dfrac{1}{1-\ln x}, 0<\theta\leq e^{-1}$. 则

(i)存在唯一的函数 $\varphi(\theta)$,使得 $l(\theta,\varphi(\theta))=0$,且

$$0<\varphi(\theta)<\theta.$$

(ii)当 $x,y\in[\varphi(\theta),\theta]$时,不等式(4.3)式成立.

证明 (i)由定理 4.1 之情形 1 的证明可知,$l(\theta,y)(0<y<\theta)$关于 y 为严格单调递减、连续,且 $l(\theta,0+0)=+\infty$;$l(\theta,\theta-0)<0$,故由连续函数的介值定理知断言(i)为真.

(ii)不妨设 $\varphi(\theta)\leq y<x\leq\theta$. 由定理 4.1 之情形 1 的证明可知,只需证明 $l(\theta,y)\leq 0$,此时

$$\frac{\partial l(\theta,y)}{\partial y}=1-\frac{\theta}{y}<0,$$

$l(\theta,y)$关于 y 在$[\varphi(\theta),\theta]$上严格单调递减,故有

$$l(\theta,y)\leq l(\theta,\phi(\theta))=0,$$

从而可断言(ii)为真.

第五节 关于三角函数的几个不等式

本节设 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0, a=(a_1,a_2,\cdots,a_n), s=\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}a_i}, \overline{a}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$. 以下是关于三角函数的一些不等式.

定理 5.1 设锐角 α_0 满足 $\alpha_0\tan\alpha_0=1$，

（ⅰ）若 $\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}<\alpha_0$，则有

$$\sum_{i=1}^{n}\sin a_i\geq n\sin s.$$

（ⅱ）若 $\alpha_0<\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\leq\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}<\pi$，则不等式反向.

证明 因为函数 $y=x\tan x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上递增的，所以定理中的 α_0 为唯一的，设 $f(a)=\sum_{i=1}^{n}\sin a_i$，则

$$f'_1(a)=\cos a_1,$$

$$(\ln a_1-\ln a_2)(a_1f'_1-a_2f'_2)$$
$$=(\ln a_1-\ln a_2)(a_1\cos a_1-a_2\cos a_2),$$

由于

$$(t\cos t)'=\cos t-t\sin t, \tag{5.1}$$

(5.1)式在 $(0,\alpha_0)$ 上为正，此时 $f(a)=\sum_{i=1}^{n}\sin a_i$ 在 $(0,\alpha_0)^n$ 上为 S－几何凸函数；在 (α_0,π) 为负，此时 $f(a)=\sum_{i=1}^{n}\sin a_i$ 在 $(\alpha_0,\pi)^n$ 上为 S－几何凹函数；由定理 1.4 和第四章的引理 7.1，即知结论成立.

推论 5.1 （ⅰ）若 $\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}<\alpha_0$，则

$$n\sin\bar{a}\overset{(5.2)}{\geq}\sum_{i=1}^{n}\sin a_i\geq n\sin s\overset{(5.3)}{\geq}n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\sin a_i}.$$

（ⅱ）若 $\alpha_0<\min\{a_1,\cdots,a_n\}\leq\max\{a_1,\cdots,a_n\}<\frac{\pi}{2}$，则

$$n\sin\bar{a}\overset{(5.4)}{\geq}n\sin s\geq\sum_{i=1}^{n}\sin a_i\overset{(5.5)}{\geq}n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\sin a_i}.$$

证明 因为 $y=\sin x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 为凹函数，所以(5.2)式成立；由第二章推论 3.1 的（ⅰ）知：$y=\sin x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上为几何凹函数，所以 $f(a)=\prod_{i=1}^{n}\sin a_i$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})^n$ 上也是几何凹函数，(5.3)式成立；又因 $\frac{\pi}{2}>\bar{a}\geq s\geq0$，$y=\sin x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增，(5.4)式成立；至于(5.5)式，则是算术平均与几何平均的关系.

定理 5.2 设锐角 α_0 满足 $2\alpha_0=\tan\alpha_0$，

(ⅰ)若 $\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}<\alpha_0$,则有

$$\sum_{i=1}^{n}\cot a_i \geq n\cot s.$$

(ⅱ)若 $\alpha_0<\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\leq\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}<\frac{\pi}{2}$,则不等式反向.

证明 由于对 $y=2x-\tan x$,有

$$y' = 2-\sec^2 x = \frac{\cos 2x}{\cos^2 x},$$

所以 $y=2x-\tan x$ 在 $(0,\frac{\pi}{4})$ 上递增的,在 $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ 上递减的,且 $y(0)=0$, $y(\frac{\pi}{2}+0)=-\infty$ 所以条件中的 α_0 存在且唯一;设 $f(a)=\sum_{i=1}^{n}\cot a_i$,则

$$f'_1(a) = -\csc^2 a_1,$$

$$(\ln a_1-\ln a_2)(a_1 f'_1 - a_2 f'_2)$$

$$= (\ln a_1-\ln a_2)(-a_1\csc^2 a_1 + a_2\csc^2 a_2), \tag{5.6}$$

由于

$$(-t\csc^2 t)' = -\csc^2 t + 2t\csc^2 t\cot t$$
$$= \csc^2 t\cot t(2t-\tan t)$$

在 $(0,\alpha_0)$ 上为正,(5.6)为正,此时 f 在 $(0,\alpha_0)^n$ 上为 S-几何凸函数;在 $(\alpha_0,\frac{\pi}{2})^n$ 为负,(5.6)为负,此时 f 在 $(\alpha_0,\frac{\pi}{2})^n$ 上为 S-几何凹函数;由定理 1.4 和第四章的引理 7.1,即得结论.

推论 5.2 (ⅰ)若 $\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}<\frac{\pi}{4}$,则有

$$\sum_{i=1}^{n}\cot a_i \geq n\cot s \overset{(5.7)}{\geq} n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\cot a_i} \overset{(5.8)}{\geq} n\cot\overline{a}.$$

(ⅱ)若 $\frac{\pi}{4}<\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\leq\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}<\alpha_0$,则有

$$\sum_{i=1}^{n}\cot a_i \geq n\cot s \geq n\cot\overline{a} \overset{(5.9)}{\geq} n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\cot a_i}.$$

(ⅲ)若 $\alpha_0<\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\leq\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}<\frac{\pi}{2}$,则有

$$n\cot s \geq \sum_{i=1}^{n}\cot a_i \geq n\cot\overline{a} \geq n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\cot a_i}.$$

证明 由第二章推论 3.1 的(ⅳ)知，$y=\cot x$ 在$(0,\frac{\pi}{2})$为几何凹函数，所以 $f(a)=\prod_{i=1}^{n}\cot a_i$ 在$(0,\frac{\pi}{2})^n$ 上也是几何凹函数，(5.7)式成立；对于(5.8)和(5.9)式，考虑函数 $y=\cot x$，有

$$y'=-\csc^2 x,\qquad y''=2\csc^2 x\cdot\cot x,$$

$$yy''-(y')^2=\csc^2 x(2\cot^2 x-\csc^2 x)=\csc^2 x(\cot^2 x-1),$$

从而知 $y=\cot x$ 在$(0,\frac{\pi}{4})$上为对数凸函数，在$(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$上为对数凹函数，(5.8)和(5.9)式成立.

定理 5.3 设 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$为锐角，则

$$\sum_{i=1}^{n}\csc a_i\geq n\csc s.$$

证明 设 $f(a)=\sum_{i=1}^{n}\csc a_i$，则

$$f_1'(a)=-\csc a_1\cot a_1,$$

$$(\ln a_1-\ln a_2)(a_1f_1'-a_2f_2')$$
$$=(\ln a_1-\ln a_2)(-a_1\csc a_1\cot a_1+a_2\csc a_2\cot a_2),\quad(5.10)$$

由于

$$(-t\cdot\csc t\cdot\cot t)'=-\csc t\cdot\cot t+t\csc t\cot^2 t+t\csc^3 t$$
$$=\csc^3 t(t+t\cos^2 t-\sin t\cos t)=\csc^3 t(t+t\cos^2 t-\frac{1}{2}\sin 2t)$$
$$\geq\csc^3 t(t-\frac{1}{2}\sin 2t)\geq 0,$$

在$(0,\frac{\pi}{2})$上为正，此时(5.10)为正，f 在$(0,\frac{\pi}{2})^n$ 上为 S－几何凸函数，由定理 1.4 和第四章的引理 7.1，结论得证.

定理 5.4 (ⅰ)若 $\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}<1$，则有

$$\sum_{i=1}^{n}\arctan a_i\geq n\arctan s.$$

(ⅱ)若 $\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}>1$，则不等式反向.

证明 设 $f(a)=\sum_{i=1}^{n}\arctan a_i$，则有

$$f_1'(a)=\frac{1}{1+a_1^2},$$

$$(\ln a_1-\ln a_2)(a_1f_1'-a_2f_2')$$
$$=(\ln a_1-\ln a_2)\left(\frac{a_1}{1+a_1^2}-\frac{a_2}{1+a_2^2}\right),\qquad(5.11)$$

由于

$$\left(\frac{t}{1+t^2}\right)'=\frac{1+t^2-2t^2}{(1+t^2)^2}=\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$$

在(0,1)上为正,此时(5.11)为正,f 在$(0,1)^n$ 上为 S - 几何凸函数;在(1+∞)上为负,(5.11)为负,f 在$(1,+\infty)^n$ 上为 S - 几何凹函数;由定理 1.4 和第四章的引理 7.1,结论得证.

推论 5.3 (ⅰ)若 $\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}<1$,则有

$$n\arctan\bar{a}\overset{(5.12)}{\geq}\sum_{i=1}^{n}\arctan a_i\geq n\arctan s\overset{(5.13)}{\geq}n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\arctan a_i}.$$

(ⅱ)若 $\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}>1$,则有

$$n\arctan\bar{a}\overset{(5.14)}{\geq}n\arctan s\geq\sum_{i=1}^{n}\arctan a_i\overset{(5.15)}{\geq}n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\arctan a_i}.$$

证明 因 $y=\arctan x$ 在$(0,+\infty)$为凹函数,所以(5.12)式成立;由于 $y=\arctan x$ 在$(0,+\infty)$是几何凹函数,故 $f(a)=\prod_{i=1}^{n}\arctan a_i$ 在 R_{++}^n 上也是几何凹函数,(5.13)式成立;由于 $y=\arctan x$ 在$(0,+\infty)$上为增函数,(5.14)成立;至于(5.15)式,是算术平均与几何平均的关系.

引理 5.1 设函数 $f(x)=2x\mathrm{arccot}x-1$,则 f 在$(0,+\infty)$上单调递增.

证明

$$f'(x)=2\mathrm{arccot}x-\frac{2x}{1+x^2},$$

$$f''(x)=-\frac{2}{1+x^2}-\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}=-\frac{4}{(1+x^2)^2}<0,$$

所以 f' 为单调递减,又 $f'(+\infty)=0$,从而 $f'(x)>0$,故 f 在$(0,+\infty)$上单调递增.

由于引理 5.1 中,$f(0)=0$,$f(1)=\frac{\pi}{2}-1>0$,所以存在唯一的 $\alpha_0\in(0,1)$,使 $f(\alpha_0)=0$,对此 α_0 有

定理 5.5 (ⅰ)若 $\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}<\alpha_0$,则有

$$n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\mathrm{arccot}a_i}\overset{(5.16)}{\leq}n\mathrm{arccot}\bar{a}$$

$$\overset{(5.17)}{\le}\sum_{i=1}^{n}arc\cot a_i\overset{(5.18)}{\le}narc\cot s.$$

(ⅱ) 若 $a_0<a_1,a_2,\cdots,a_n<1$，则有

$$narc\cot\bar{a}\overset{(5.19)}{\le}n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}arc\cot a_i}$$

$$\overset{(5.20)}{\le}\sum_{i=1}^{n}arc\cot a_i\overset{(5.18)}{\le}narc\cot s.$$

(ⅲ)若 $\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}>1$，则有

$$narc\cot\bar{a}\overset{(5.19)}{\le}n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}arc\cot a_i}$$

$$\overset{(5.21)}{\le}narc\cot s\overset{(5.22)}{\le}\sum_{i=1}^{n}arc\cot a_i.$$

证明 对于(5.16)和(5.19)式，两边先约去 n，考虑函数 $y=arc\cot x$，因

$$y'=-\frac{1}{1+x^2},\qquad y''=\frac{2x}{(1+x^2)^2},$$

$$yy''-(y')^2=\frac{2x\cdot\arctan x-1}{(1+x^2)^2},$$

由引理 5.1 知 y 在 $(0,\alpha_0)$ 上为对数凹函数，在 $(\alpha_0,\frac{\pi}{2})$ 为对数凸函数，(5.16)和(5.19)式得证；因 $y=arc\cot x$ 在 $(0,+\infty)$ 上为凸函数，(5.17)成立；因 $arc\cot x=\frac{\pi}{2}-\arctan x$，再由定理 5.4 知(5.18)和(5.22)式成立；由算术平均与几何平均的关系得(5.20)式；又 $y=arc\cot x$ 在 $(0,+\infty)$ 上为几何凹函数，$\prod_{i=1}^{n}arc\cot a_i$ 在 $(0,+\infty)^n$ 上为几何凹函数，故(5.21)式成立。

定理 5.6 设 $0<a_i<\frac{\pi}{2}$，$i=1,2,\cdots,n$，则有

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\cot a_i\le ns\cot s.$$

证明 设 $f(a)=\sum_{i=1}^{n}a_i\cot a_i$，因

$$f_1'(a)=\cot a_i-a_i\csc^2 a_i,$$

$$(\ln a_1-\ln a_2)(a_1f_1'-a_2f_2')=(\ln a_1-\ln a_2)$$

$$\cdot(\cot a_1-a_1\csc^2 a_1-\cot a_2+a_2\csc^2 a_2),\tag{5.23}$$

又因

$$(\cot t - t\csc^2 t)' = -2\csc^2 t + 2t\csc^2 t\cot t$$
$$= 2\cos^2 t(\frac{t}{\tan t} - 1) \le 0,$$

所以 (5.23)为负,从而 f 在$(0,\frac{\pi}{2})^n$ 上为 S－几何凹函数;再由定理 1.4 和第四章的引理 7.1,结论得证.

第六节　有正最值的几何控制及一些应用

在本节中涉及的向量 $a=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$的 a_i 有正的最大值 M 和最小值 m,即

$$\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\} = M > 0,$$
$$\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\} = m > 0,$$

下面恒设 $s=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$.

引理 6.1

$$\ln(a_1,a_2,\cdots,a_n) \succ \ln(M,\sqrt[n-2]{\frac{s^n}{Mm}},\sqrt[n-2]{\frac{s^n}{Mm}},\cdots,\sqrt[n-2]{\frac{s^n}{Mm}},m).$$

证明　不妨设 $M=a_1\ge a_2\ge\cdots\ge a_n=m>0$,因 $s^n=a_1a_2\cdots a_n$,故有

$$Mm^{n-1} = Mm\cdots m \le s^n = a_1a_2\cdots a_n \le MM\cdots Mm = M^{n-1}m,$$

$$m \le \sqrt[n-2]{\frac{s^n}{Mm}} \le M,$$

往证当 $a_1=M,k\ge 2$ 时,有

$$a_1a_2\cdots a_k \ge M(\sqrt[n-2]{\frac{s^n}{Mm}})^{k-1}, \tag{6.1}$$

事实上,若不然,则有

$$a_1a_2\cdots a_k < M(\sqrt[n-2]{\frac{s^n}{Mm}})^{k-1},$$

于是

$$a_1(a_k)^{k-1} \le a_1a_2\cdots a_k < M(\sqrt[n-2]{\frac{s^n}{Mm}})^{k-1},$$

所以 $a_k<\sqrt[n-2]{\frac{s^n}{Mm}}$,从而 $a_{n-1}\le\cdots\le a_{k+1}\le a_k<\sqrt[n-2]{\frac{s^n}{Mm}}$则

$$a_1\cdots a_k\cdots a_{n-1}a_n < M(\sqrt[n-2]{\frac{s^n}{Mm}})^{k-1}(\sqrt[n-2]{\frac{s^n}{Mm}})^{n-k-1}m,$$

$$a_1\cdots a_k\cdots a_{n-1}a_n < s^n,$$

得出矛盾,等式(6.1)式为真,又

$$a_1a_2\cdots a_n = M\sqrt[n-2]{\frac{s^n}{Mm}}\cdot\sqrt[n-2]{\frac{s^n}{Mm}}\cdots\sqrt[n-2]{\frac{s^n}{Mm}}m = s^n,$$

故引理 6.1 得证.

引理 6.2 存在自然数 k_0,$1\le k_0\le n-1$,使得

$$\ln(\underbrace{M,\cdots,M}_{k_0},\frac{s^n}{m^{n-k_0-1}M^{k_0}},m,\cdots,m)\succ\ln(a_1,a_2,\cdots,a_n).$$

证明 由于 $m^{n-1}M\le s^n\le mM^{n-1}$,$s^n$ 在递减数组 $\{m^{n-1}M,\cdots,m^{n-k}M^k,\cdots,mM^{n-1}\}$ 的两个数之间,设 $m^{n-k_0}M^{k_0}\le s^n\le m^{n-k_0-1}M^{k_0+1}$,往证

$$\ln(\underbrace{M,\cdots,M}_{k_0个},\frac{s^n}{m^{n-k_0-1}M^{k_0}},m,\cdots,m)\succ\ln(a_1,a_2,\cdots,a_n).$$

不妨设 $M=a_1\ge a_2\ge\cdots\ge a_n=m>0$,当 $i\le k_0$ 时,显然有

$$M^i\ge a_1\cdots a_i,$$

当 $i=k_0+1$ 时,有

$$s^n = a_1\cdots a_{k_0+1}\cdots a_n,$$

$$s^n\ge a_1\cdots a_{k_0+1}\cdots a_i m^{n-i},$$

$$\underbrace{M\cdots M}_{k_0个}\frac{s^n}{m^{n-k_0-1}M^{k_0}}\ge a_1\cdots a_{k_0+1},$$

当 $i>k_0+1$ 时,有

$$s^n = a_1\cdots a_{k_0+1}\cdots a_n,$$

$$s^n\ge a_1\cdots a_{k_0+1}m^{n-i},$$

$$\underbrace{M\cdots M}_{k_0个}\frac{s^n}{m^{n-k_0-1}M^{k_0}}m^{i-k_0-1}\ge a_1\cdots a_{k_0+1}\cdots a_i,$$

至此引理 6.2 得证.

杨克昌教授在[39]中的一个结果如下:

例 1 设 $m=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,$M=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$且 $a_i>0$,$i=1,2,\cdots,n$,求证

$$\sum_{i=1}^n a_i - n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}\ge(\sqrt{M}-\sqrt{m})^2.$$

证明 设 $f(a)=\sum_{i=1}^{n}a_i-n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}$，$f_1=1-a_1^{\frac{1-n}{n}}\prod_{i=2}^{n}a_i^{\frac{1}{n}}$，进而有

$$(\ln a_1-\ln a_2)(a_1f'_1-a_2f'_2)=(\ln a_1-\ln a_2)(a_1-a_2)\geq 0,$$

故 f 在 $(m,M)^n$ 上为 S—几何凸函数，由引理 6.1 有

$$\ln(a_1,a_2,\cdots,a_n)\succ \ln\left(M,\sqrt[n-2]{\frac{s^n}{Mm}},\sqrt[n-2]{\frac{s^n}{Mm}},\cdots,\sqrt[n-2]{\frac{s^n}{Mm}},m\right),$$

所以有

$$\sum_{i=1}^{n}a_i-n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}\geq m+M+(n-2)\sqrt[n-2]{\frac{s^n}{Mm}}-ns, \tag{6.2}$$

设 $g(s)=(n-2)\sqrt[n-2]{\frac{s^n}{Mm}}-ns$，有

$$g'(s)=\frac{ns^{\frac{2}{n-2}}}{\sqrt[n-2]{Mm}}-n,$$

知 $g(s)$ 在 $\sqrt{Mm}$ 处取最小值，再代入(6.2)式即可.

如果此题用凸函数来证，要复杂一些.如果利用引理 6.2 和 f 为 S—几何凸性，会得到怎样的结果呢？

引理 6.3 设 $n\geq 2$，$p>1$，则

$$1<n\frac{\ln(p-1)-\ln\ln p}{\ln p}<n.$$

证明

$$1<n\frac{\ln(p-1)-\ln\ln p}{\ln p}$$

$$\Leftrightarrow g(p)=p-1-p^{\frac{1}{n}}\ln p>0,$$

而

$$g'(p)=1-\left(1+\frac{1}{n}\ln p\right)p^{\frac{1}{n}-1},$$

$$[p^{1-\frac{1}{n}}g'(p)]'=\left(p^{1-\frac{1}{n}}-1-\frac{1}{n}\ln p\right)'$$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)p^{-\frac{1}{n}}-\frac{1}{np}=\frac{(n-1)p^{1-\frac{1}{n}}-1}{np}>0,$$

故 $p^{1-\frac{1}{n}}g'(p)$ 单调递增，又 $p^{1-\frac{1}{n}}g'(p)$ 在 $p\to 1+0$ 时为 0，所以

$$p^{1-\frac{1}{n}}g'(p)>0\Rightarrow g'(p)>0,$$

且 $g(1+0)=0$，从而有

$$g(p)=p-1-p^{\frac{1}{n}}\ln p>0.$$

又

$$n\frac{\ln(p-1)-\ln\ln p}{\ln p}<n$$

$$\Leftrightarrow h(p)=p\ln p-p+1>0,$$

且

$$h'(p)=\ln p>0,$$

所以 $h(p)$ 单调递增，又 $h(1+0)=0$，故

$$h(p)=p\ln p-p+1>0.$$

定理 6.1 设

$$\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}=M>0,$$

$$\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}=m>0,$$

且 $p=\dfrac{M}{m}>1$，则有

$$\sum_{i=1}^{n}a_i-n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}\leq\max_{1\leq k\leq n,k\in N}\{kM+(n-k)m-n\sqrt[n]{m^{n-k}M^k}\}$$

$$\leq nm\left[\frac{\ln(p-1)-\ln\ln p-1}{\ln p}(p-1)+1\right].$$

证明 由引理 6.2 知存在自然数 k_0，$1\leq k_0\leq n-1$，使得

$$\sum_{i=1}^{n}a_i-n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}\leq k_0M+(n-k_0-1)m+\frac{s^n}{m^{n-k_0-1}M^{k_0}}-ns,$$

易证关于 s 函数 $\dfrac{s^n}{m^{n-k_0-1}M^{k_0}}-ns$ 在 $\sqrt[n-1]{m^{n-k_0-1}M^{k_0}}$ 取唯一的极小值，且

$$\sqrt[n]{m^{n-k_0}M^{k_0}}\leq\sqrt[n-1]{m^{n-k_0-1}M^{k_0}}\leq\sqrt[n]{m^{n-k_0-1}M^{k_0+1}},$$

所以

$$\frac{s^n}{m^{n-k_0-1}M^{k_0}}-ns\leq\frac{m^{n-k_0}M^{k_0}}{m^{n-k_0-1}M^{k_0}}-n\sqrt[n]{m^{n-k_0}m^{k_0}}$$

$$=m-n\sqrt[n]{m^{n-k_0}M^{k_0}}$$

或

$$\frac{s^n}{m^{n-k_0-1}m^{k_0+1}}-ns\leq\frac{m^{n-k_0-1}M^{k_0+1}}{m^{n-k_0-1}M^{k_0}}-n\sqrt[n]{m^{n-k_0-1}M^{k_0+1}}$$

$$=M-n\sqrt[n]{m^{n-k_0-1}M^{k_0+1}},$$

进而有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i - n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \le k_0 M + (n-k_0)m - n\sqrt[n]{m^{n-k_0} M^{k_0}},$$

或

$$\sum_{i=1}^{n} a_i - n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$$

$$\le (k_0+1)M + (n-k_0-1)m - n\sqrt[n]{m^{n-k_0-1} M^{k_0+1}},$$

由于 $1 \le k_0 \le n-1$,结合以上两式有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i - n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \le \max_{1\le k\le n, k\in N}\{kM + (n-k)m - n\sqrt[n]{m^{n-k}M^k}\},$$

设 $g(t) = tM + (n-t)m - n\sqrt[n]{m^{n-t}M^t}$,其中 $t \in [1,n]$,则有

$$g(t) = t(M-m) + nm - nmp^{\frac{t}{n}},$$

$$g'(t) = M - m - mp^{\frac{t}{n}}\ln p,$$

令 $g'(t) = 0$ 有

$$\frac{p-1}{\ln p} = p^{\frac{t}{n}},$$

$$t = n\frac{\ln(p-1) - \ln\ln p}{\ln p},$$

由引理 6.3 知 $n\frac{\ln(p-1)-\ln\ln p}{\ln p} \in [1,n]$,所以 $g(t)$ 存在唯一的驻点 $n\frac{\ln(p-1)-\ln\ln p}{\ln p}$,且

$$g''(t) = -\frac{m}{n}p^{\frac{t}{n}}\ln^2 p < 0,$$

故 $g(t)$ 在 $n\frac{\ln(p-1)-\ln\ln p}{\ln p}$ 取最大值,所以

$$g(t) \le n\frac{\ln(p-1)-\ln\ln p}{\ln p}(M-m) + nm - nm\frac{p-1}{\ln p}$$

$$= nm\left[\frac{\ln(p-1)-\ln\ln p}{\ln p}(p-1) + 1 - \frac{p-1}{\ln p}\right]$$

$$= nm\left[\frac{\ln(p-1)-\ln\ln p-1}{\ln p}(p-1) + 1\right],$$

因此对于 $1 \le k \le n, k \in N$,也有

$$g(k) \le nm\left[\frac{\ln(p-1)-\ln\ln p-1}{\ln p}(p-1) + 1\right],$$

命题得证.

书[2]的76页有一个 *Schweitzer* 不等式,这里用 S－几何凹性质来证明.

例2 设 $0<m\le a_i\le M, i=1,2,\cdots,n$,则

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\le\frac{(M+m)^2}{4Mm}.$$

证明 不妨设 m, M 为 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的最小值和最大值,因为 a_i, $\frac{1}{a_i}, i=1,2,\cdots,n$,都是几何凸函数,所以 $\sum_{i=1}^{n}a_i$, $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$ 为几何凸函数,$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$ 为几何凸函数. 由引理6.2知 $(\underbrace{M,\cdots,M}_{k_0\text{个}},\frac{s^n}{m^{n-k_0-1}M^{k_0}},m,\cdots,m)$ 对数控制 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,所以有

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\le\frac{1}{n^2}\left[k_0M+(n-k_0-1)m+\frac{s^n}{m^{n-k_0-1}M^{k_0}}\right]$$
$$\cdot\left[\frac{k_0}{M}+\frac{n-k_0-1}{m}+\frac{m^{n-k_0-1}M^{k_0}}{s^n}\right],$$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\\&\le\frac{1}{n^2}\left[k_0^2+(n-k_0-1)^2+1+k_0(n-k_0-1)\left(\frac{m}{M}+\frac{M}{m}\right)\right.\\&+\frac{s^n}{m^{n-k_0-1}M^{k_0}}\left(\frac{k_0}{M}+\frac{n-k_0-1}{m}\right)\\&\left.+\frac{m^{n-k_0-1}M^{k_0}}{s^n}[k_0M+(n-k_0-1)m]\right],\end{aligned}$$

因

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{t}{m^{n-k_0-1}M^{k_0}}\left(\frac{k_0}{M}+\frac{n-k_0-1}{m}\right)\\&+\frac{m^{n-k_0-1}M^{k_0}}{t}[k_0M+(n-k_0-1)m]\end{aligned}$$

在 $(0,+\infty)$ 上只有一个极小值,所以对于 $f(s^n)$ 和 $m^{n-k_0}M^{k_0}\le s^n\le m^{n-k_0-1}M^{k_0+1}$,有

$$\begin{aligned}f(s^n)&\le f(m^{n-k_0}M^{k_0})\\&=m\left(\frac{k_0}{M}+\frac{n-k_0-1}{m}\right)+\frac{1}{m}[k_0M+(n-k_0-1)m]\end{aligned}$$

$$= k_0(\frac{m}{M} + \frac{M}{m}) + 2(n - k_0 - 1),$$

与

$$f(s^n) \leq f(m^{n-k_0-1}M^{k_0+1})$$

$$= M(\frac{k_0}{M} + \frac{n - k_0 - 1}{m}) + \frac{1}{M}[k_0 M + (n - k_0 - 1)m]$$

$$= (n - k_0 - 1)(\frac{m}{M} + \frac{M}{m}) + 2k_0$$

之一成立.即有

$$(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i)(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})$$

$$\leq \frac{1}{n^2}[k_0^2 + (n - k_0 - 1)^2 + 1 + k_0(n - k_0 - 1)(\frac{m}{M} + \frac{M}{m}) + k_0(\frac{m}{M} + \frac{M}{m}) + 2(n - k_0 - 1)], \tag{6.3}$$

与

$$(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i)(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})$$

$$\leq \frac{1}{n^2}[k_0^2 + (n - k_0 - 1)^2 + 1 + k_0(n - k_0 - 1)(\frac{m}{M} + \frac{M}{m}) + (n - k_0 - 1)(\frac{m}{M} + \frac{M}{m}) + 2k_0], \tag{6.4}$$

之一成立.对于(6.3)式,右边为 k_0 的一元二次多项式,考虑其二次项系数 $-(\frac{m}{M}+\frac{M}{m}-2)$ 和一次项系数 $n(\frac{m}{M}+\frac{M}{m}-2)$;对于(6.4)式,右边 k_0 为的一元二次多项式,考虑其二次项系数 $-(\frac{m}{M}+\frac{M}{m}-2)$ 和一次项系数 $(n-2)(\frac{m}{M}+\frac{M}{m}-2)$,利用抛物线的极大值点的性质,有

$$(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i)(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})$$

$$\leq \frac{1}{n^2}[(\frac{n}{2})^2 + (n - \frac{n}{2} - 1)^2 + 1 + \frac{n}{2}(n - \frac{n}{2} - 1)(\frac{m}{M} + \frac{M}{m}) + \frac{n}{2}(\frac{m}{M} + \frac{M}{m}) + 2(n - \frac{n}{2} - 1)] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(\frac{m}{M} + \frac{M}{m})$$

$$= \frac{(M+m)^2}{4Mm},$$

或

$$(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i)(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})$$

$$\le \frac{1}{n^2}[(\frac{n-2}{2})^2 + (n - \frac{n-2}{2} - 1)^2 + 1$$

$$+ \frac{n-2}{2}(n - \frac{n-2}{2} - 1)(\frac{m}{M} + \frac{M}{m})$$

$$+ (n - \frac{n-2}{2} - 1)(\frac{m}{M} + \frac{M}{m}) + 2\frac{n-2}{2}]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(\frac{m}{M} + \frac{M}{m}) = \frac{(M+m)^2}{4Mm},$$

这就证明了所言不等式.

可以把 *Schweitzer* 不等式加强为:

定理 6.2 设 $0 < m \le a_i \le M, i = 1,2,\cdots,n$,则当 n 为偶数时,有

$$(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i)(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}) \le \frac{(M+m)^2}{4Mm};$$

当 n 为奇数时,有

$$(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i)(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}) \le \frac{(M+m)^2}{4Mm} - \frac{(M-m)^2}{4n^2Mm}.$$

证明 分析一下(6.3)和(6.4)式,当 n 为奇数时,自然数 k_0 是取不到 $\frac{n}{2}$ 和 $\frac{n-2}{2}$,只能在 $\frac{n-1}{2}$ 处取到最大值,此时

$$(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i)(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})$$

$$\le \frac{1}{n^2}[(\frac{n-1}{2})^2 + (n - \frac{n-1}{2} - 1)^2$$

$$+ 1 + \frac{n-1}{2}(n - \frac{n-1}{2} - 1)(\frac{m}{M} + \frac{M}{m})$$

$$+ \frac{n-1}{2}(\frac{m}{M} + \frac{M}{m}) + 2(n - \frac{n-1}{2} - 1)]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(\frac{m}{M} + \frac{M}{m}) + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{4n^2}(\frac{m}{M} + \frac{M}{m})$$

$$= \frac{(M+m)^2}{4Mm} - \frac{(M-m)^2}{4n^2Mm},$$

或

$$(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i)(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})$$

$$\leq \frac{1}{n^2}[(\frac{n-1}{2})^2+(n-\frac{n-1}{2}-1)^2$$

$$+1+\frac{n-1}{2}(n-\frac{n-1}{2}-1)(\frac{m}{M}+\frac{M}{m})$$

$$+(n-\frac{n-1}{2}-1)(\frac{m}{M}+\frac{M}{m})+2\frac{n-1}{2}]$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(\frac{m}{M}+\frac{M}{m})+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{4n^2}(\frac{m}{M}+\frac{M}{m})$$

$$=\frac{(M+m)^2}{4Mm}-\frac{(M-m)^2}{4n^2Mm},$$

命题得证.

陈胜利先生在文[43]中有如下的一个结果.

例 3 设 $a_i\in[m,M]$,$0<m<M$,$i=1,2,\cdots,n$,并记

$$A_n(a_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i,G_n(a_i)=(\prod_{i=1}^{n}a_i)^{\frac{1}{n}},$$

则

$$\frac{1}{4M}[A_n(a_i^2)-G_n(a_i^2)]$$

$$\overset{(6.5)}{\leq} A_n(a_i)-G_n(a_i)\overset{(6.6)}{\leq}\frac{1}{4m}[A_n(a_i^2)-G_n(a_i^2)]$$

证明 设 $R>0$,

$$E_R=\{a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid\sum_{i=1}^{n}a_i\leq R,a_i>0,i=1,2,\cdots,n\},$$

$s=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}$,由第四章推论 1.3 的(ⅱ)知 E_R 为几何凸集.因此只要证明(6.5)式和(6.6)式在任一 $E_R(R>0)$上成立即可,设正数 W_R 充分大,使函数

$$f(a)=A_n(a_i)-G_n(a_i)-\frac{1}{4M}[A_n(a_i^2)-G_n(a_i^2)]+W_R$$

在 E_R 上为正,因

$$f'_1(a)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n}a_1^{\frac{1}{n}-1}\sqrt[n]{a_2\cdots a_n}$$

$$-\frac{1}{4M}[\frac{2a_1}{n}-\frac{2}{n}a_1^{\frac{2}{n}-1}\sqrt[n]{a_2\cdots a_n}],$$

$$(\ln a_1-\ln a_2)(a_1f_1'(a)-a_2f_2'(a))$$
$$=(\ln a_1-\ln a_2)\left(\frac{a_1-a_2}{n}-\frac{1}{4M}\frac{2a_1^2-2a_2^2}{n}\right)$$
$$=(\ln a_1-\ln a_2)(a_1-a_2)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{4M}\frac{2a_1+2a_2}{n}\right),$$

而$(\ln a_1-\ln a_2)(a_1-a_2)\geq 0, a_1\leq M, a_2\leq M$，所以有

$$(\ln a_1-\ln a_2)(a_1f_1'(a)-a_2f_2'(a))$$
$$\geq(\ln a_1-\ln a_2)(a_1-a_2)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{4M}\frac{2M+2M}{n}\right)=0,$$

故 f 在 E_R 上为 S－几何凸函数，

$$A_n(a_i)-G_n(a_i)-\frac{1}{4M}[A_n(a_i^2)-G_n(a_i^2)]+W_R$$
$$\geq A_n(s)-G_n(s)-\frac{1}{4M}[A_n(s^2)-G_n(s^2)]+W_R=W_R,$$

移项即得(6.5)式.

对于(6.6)式.设正数 U_R 充分大，使函数

$$g(a)=A_n(a_i)-G_n(a_i)-\frac{1}{4m}[A_n(a_i^2)-G_n(a_i^2)]+U_R$$

在 E_R 上为正，同理可证 g 在 E_R 上为 S－几何凹函数，此处从略.

在例 3 中，若 M 和 m 分别是诸 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的最大值和最小值，则利用引理 6.1 和函数 f 的几何凸性，会得到怎样的不等式呢？

$$f(a)=A_n(a_i)-G_n(a_i)-\frac{1}{4M}[A_n(a_i^2)-G_n(a_i^2)]+W_R$$
$$\geq\frac{M+m+(n-2)\sqrt[n-2]{\frac{s^n}{Mm}}}{n}-s$$
$$-\frac{1}{4M}\left[\frac{M^2+m^2+(n-2)\left(\sqrt[n-2]{\frac{s^n}{Mm}}\right)^2}{n}-s^2\right]+W_R,$$

$$A_n(a_i)-G_n(a_i)-\frac{1}{4M}[A_n(a_i^2)-G_n(a_i^2)]$$
$$\geq\frac{M+m}{n}-\frac{1}{4M}\frac{M^2+m^2}{n}-s+\frac{1}{4M}s^2$$

$$+\frac{(n-2)}{n}\left[\sqrt[n-2]{\frac{s^n}{Mm}}-\frac{1}{4M}\left(\sqrt[n-2]{\frac{s^n}{Mm}}\right)^2\right],$$

由于 $Mm^{n-1}\leq s^n\leq M^{n-1}m$，利用一元二次函数的图像知

$$-s+\frac{1}{4M}s^2\geq-\sqrt[n]{M^{n-1}m}+\frac{1}{4M}\sqrt[n]{M^{2n-2}m^2}$$

$$=-M^{\frac{n-1}{n}}m^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{4}M^{\frac{n-2}{n}}m^{\frac{2}{n}},$$

$$\sqrt[n-2]{\frac{s^n}{Mm}}-\frac{1}{4M}\left(\sqrt[n-2]{\frac{s^n}{Mm}}\right)^2$$

$$\geq\sqrt[n-2]{\frac{Mm^{n-1}}{Mm}}-\frac{1}{4M}\left(\sqrt[n-2]{\frac{Mm^{n-1}}{Mm}}\right)^2=m-\frac{m^2}{4M},$$

所以有

$$A_n(a_i)-G_n(a_i)-\frac{1}{4M}[A_n(a_i^2)-G_n(a_i^2)]$$

$$\geq\frac{M+m}{n}-\frac{1}{4M}\frac{M^2+m^2}{n}$$

$$-M^{\frac{n-1}{n}}m^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{4}M^{\frac{n-2}{n}}m^{\frac{2}{n}}+\frac{n-2}{n}\left(m-\frac{m^2}{4M}\right)$$

$$=\frac{3M^2+(4n-4)Mm-(n-1)m^2}{4nM}$$

$$-M^{\frac{n-1}{n}}m^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{4}M^{\frac{n-2}{n}}m^{\frac{2}{n}}.$$

因此可把(6.5)式加强为

$$A_n(a_i)-G_n(a_i)-\frac{1}{4M}[A_n(a_i^2)-G_n(a_i^2)]$$

$$\geq\max\{0,\frac{3M^2+(4n-4)Mm-(n-1)m^2}{4nM}$$

$$-M^{\frac{n-1}{n}}m^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{4}M^{\frac{n-2}{n}}m^{\frac{2}{n}}\}.$$

如果利用引理6.2和函数 f、g 的几何凸性，再利用抛物线性质，将得到(6.5)(6.6)的逆向不等式，读者不妨一试.其实在这种思路下，可以对许多不等式进行加强.下面以对定理4.3加强为例进行说明.

定理6.3 设

$$m=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}>0,M=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}<\frac{\pi}{2},$$

则存在自然数 k_0，$1\le k_0\le n-1$，使得

$$\csc M+(n-2)\csc\sqrt[n-2]{\frac{s^n}{Mm}}+\csc m\le\sum_{i=1}^{n}\csc a_i$$

$$\le\max_{1\le k\le n-1}\left\{k\csc M+\csc\frac{s^n}{M^k m^{n-k-1}}+(n-k-1)\csc m\right\}.$$

证明 设 $f(a)=\sum_{i=1}^{n}\csc a_i$，由定理4.3的证明知，$f$ 是 $(0,\frac{\pi}{2})^n$ 上的 S-几何凸函数，由引理6.1有

$$\sum_{i=1}^{n}\csc a_i\ge\csc M+(n-2)\csc\sqrt[n-2]{\frac{s^n}{Mm}}+\csc m,$$

利用引理6.2知：存在自然数 k_0，$1\le k_0\le n-1$，使得

$$\sum_{i=1}^{n}\csc a_i\le k_0\csc M+\csc\frac{s^n}{M^{k_0}m^{n-k_0-1}}+(n-k_0-1)\csc m,$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}\csc a_i\le\max_{1\le k\le n-1}\left\{k\csc M+\csc\frac{s^n}{M^k m^{n-k-1}}+(n-k-1)\csc m\right\}.$$

练　习

下设 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$，$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$s=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}$，$\bar{a}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i$.

1. 设锐角 β_0 满足 $2\beta_0-\cos\beta_0-\beta_0\sin\beta_0=0$，锐角 α_0 满足 $\alpha_0=\cos\alpha_0$，

（ⅰ）若 $0<a_1,a_2,\cdots,a_n<\beta_0$，求证：

$$\frac{n}{1+\sin s}\ge\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\sin a_i}\ge n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\sin a_i}}\ge\frac{n}{1+\sin\bar{a}}.$$

（ⅱ）若 $\beta_0<a_1,a_2,\cdots,a_n<\alpha_0$，求证：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\sin a_i}\ge\frac{n}{1+\sin s}\ge n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\sin a_i}}\ge\frac{n}{1+\sin\bar{a}}.$$

（ⅲ）若 $\alpha_0<a_1,a_2,\cdots,a_n<\frac{\pi}{2}$，求证：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\sin a_i}\ge n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\sin a_i}}\ge\frac{n}{1+\sin s}\ge\frac{n}{1+\sin\bar{a}}.$$

2. 设 $0<a_1,a_2,\cdots,a_n<\frac{\pi}{4}$，求证：$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\tan a_i}\leq\frac{n}{1+\tan s}$.

3. 设锐角 β_0 满足 $1-3\beta_0\tan\beta_0-\beta_0^2=0$，锐角 α_0 满足 $1-\alpha_0\tan\alpha_0=0$，

(ⅰ)若 $0<a_1,a_2,\cdots,a_n<\beta_0$，求证：

$$n\,\bar{a}\cos\bar{a}\geq\sum_{i=1}^{n}a_i\cos a_i\geq ns\cos s\geq n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i\cos a_i}.$$

(ⅱ)若 $\beta_0<a_1,a_2,\cdots,a_n<\alpha_0$，求证：

$$n\,\bar{a}\cos\bar{a}\geq ns\cos s\geq\sum_{i=1}^{n}a_i\cos a_i\geq n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_j\cos a_i}.$$

(ⅲ)若 $\alpha_0<a_1,a_2,\cdots,a_n<\frac{\pi}{2}$，求证：

$$ns\cos s\geq n\,\bar{a}\cos\bar{a}\geq\sum_{i=1}^{n}a_i\cos a_i\geq n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i\cos a_i}.$$

4. 设 $0<a_1,a_2\cdots,a_n<\frac{\pi}{4}$，求证：$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\cot a_i}\geq\frac{n}{1+\cot s}$.

5. 设 $x_1,x_2,\cdots,m\in\mathbf{N},k>0$，则

(1) $\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\geq\frac{m}{k}$ 时，有 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[m]{1+kx_i}}\geq\frac{n}{\sqrt[m]{1+ks}}$.

(2) $\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\leq\frac{m}{k}$ 时，有 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[m]{1+kx_i}}\leq\frac{n}{\sqrt[m]{1+ks}}$.

第六章　几何凸函数的积分不等式

本章将讨论几何凸函数的定积分，给出几何凸函数的几个积分性质和积分不等式，其中有些与经典不等式强弱不相上下.

第一节　介绍几类平均

先介绍几个平均的定义，关于离散型$\{a_i>0, i=1,2,\cdots,n\}$的算术平均为 $A_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i$，几何平均为 $G_1=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}$；当 $p_i>0, i=1,2,\cdots,n$，$\sum_{i=1}^{n}p_i=1$ 时，$\{a_i>0, i=1,2,\cdots,n\}$的加权算术平均 $A_2=\sum_{i=1}^{n}p_ia_i$，加权几何平均为 $G_2=\prod_{i=1}^{n}a_i^{p_i}$；众所周知 $A_1\geq G_1, A_2\geq G_2$.

设函数 $f:[a,b]\to R_{++}$ 连续，则其算术平均为 $A_3=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$，几何平均为 $G_3=e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx}$ （参考[5]的 P25）；当 $p:[a,b]\to R_+$，$\int_a^b p(x)dx=1$ 时，f 的加权算术平均为 $A_4=\int_a^b p(x)f(x)dx$，加权几何平均为 $G_4=e^{\int_a^b p(x)\ln f(x)dx}$；同样有 $A_3\geq G_3, A_4\geq G_4$，这两个结果都是已知的，在这里将略作证明，为了叙述上的方便，以下记 $\Delta=b-a$，$G_3=\int_a^b f(x)dG$.

引理 1.1　设 $f:[a,b]\to R_{++}$ 且连续，$\Delta=b-a$ 则

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{f(a+\frac{1}{n}\Delta)f(a+\frac{2}{n}\Delta)\cdots f(a+\frac{n}{n}\Delta)}=\int_a^b f(x)dG.$$

证明　因

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{f(a+\frac{1}{n}\Delta)f(a+\frac{2}{n}\Delta)\cdots f(a+\frac{n}{n}\Delta)}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}e^{\ln\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}f(a+\frac{i}{n}\Delta)}}=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln f(a+\frac{i}{n}\Delta)}{n}}$$

$$=e^{\frac{1}{\Delta}\lim_{n\to+\infty}\frac{\Delta\sum_{i=1}^{n}\ln f(a+\frac{i}{n}\Delta)}{n}}=e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln f(x)dx}=\int_a^b f(x)dG.$$

我们从引理 1.1 可以体会到连续型几何平均的由来.

$A_3\geq G_3$ 的证明:

$$A_3=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\Delta}\frac{\Delta}{n}\sum_{i=1}^{n}f(a+\frac{i}{n}\Delta)$$

$$\geq\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}f(a+\frac{i}{n}\Delta)}=\int_a^b f(x)dG.$$

$A_4\geq G_4$ 的证明:

$$A_4=\int_a^b p(x)f(x)dx=\lim_{n\to+\infty}\frac{\Delta}{n}\sum_{i=1}^{n}p(a+\frac{i}{n}\Delta)f(a+\frac{i}{n}\Delta)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\Delta}{n}\sum_{i=1}^{n}p(a+\frac{i}{n}\Delta)\sum_{i=1}^{n}\frac{p(a+\frac{i}{n}\Delta)}{\sum_{i=1}^{n}p(a+\frac{i}{n}\Delta)}f(a+\frac{i}{n}\Delta)$$

由 $A_2\geq G_2$ 及积分定义知

$$A_4\geq\lim_{n\to+\infty}\int_a^b p(x)dx\left\{\prod_{i=1}^{n}[f(a+\frac{i}{n}\Delta)]^{p(a+\frac{i}{n}\Delta)}\right\}^{\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}p(a+\frac{i}{n}\Delta)}}$$

再由引理 1.1 知

$$A_4\geq\lim_{n\to+\infty}[e^{\frac{1}{\Delta}\int_a^b\ln(f(x))^{p(x)}dx}]^{\frac{\Delta}{\frac{\Delta}{n}\sum_{i=1}^{n}p(a+\frac{i}{n}\Delta)}}$$

$$=[e^{\frac{1}{\Delta}\int_a^b p(x)\ln f(x)dx}]^{\frac{\Delta}{\int_a^b p(x)dx}}$$

$$=e^{\int_a^b p(x)\ln f(x)dx}=G_4.$$

例 1 设 $[a,b]\subseteq R_{++}$,求 $f(x)=x$ 在 $[a,b]$ 上的算术平均和几何平均.

解 $A_3=\frac{1}{b-a}\int_a^b xdx=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}$;

$$G_3=e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln xdx}=e^{\frac{1}{b-a}(x\ln x-x)|_a^b}=\frac{1}{e}b^{\frac{b}{b-a}}a^{\frac{a}{a-b}}$$

第二节 积分与几何凸函数

定理 2.1(i) 设 $E\subseteq R^n_{++}$, $F\subseteq R^m_{++}$, $z=z(x,y)$在 $E\times F$ 上有定义,且对于任何 $y\in F$, $z=z(x,y)$在 E 上的限制为几何凸函数,则

$$u(x)=\int\cdots\int_{y\in F}z(x,y)d\sigma,$$

是 E 上的几何凸函数.

证明 设 $x,w\in E(\subseteq R^n_{++})$为任意两个向量,则有

$$\begin{aligned}u(x^{\frac{1}{2}}w^{\frac{1}{2}})&=\int\cdots\int_{y\in F}z(x^{\frac{1}{2}}w^{\frac{1}{2}},y)d\sigma\\&\leq\int\cdots\int_{y\in F}z^{\frac{1}{2}}(x,y)\cdot z^{\frac{1}{2}}(w,y)d\sigma\\&\overset{(1.1)}{\leq}\left[\int\cdots\int_{y\in F}z(x,y)d\sigma\cdot\int\cdots\int_{y\in F}z(w,y)d\sigma\right]^{\frac{1}{2}}\\&=u^{\frac{1}{2}}(x)\cdot u^{\frac{1}{2}}(w),\end{aligned}$$

其中的(1.1)式由 **Hölder** 不等式的积分形式推得,命题得证.

例 1 设 $f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin v}{v}\right)^x dv, x\in(0,+\infty)$,则 f 为几何凸函数.

证明 对于$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上的任一 v,有$\frac{\sin v}{v}\leq 1$,所以$\left(\frac{\sin v}{v}\right)^x$ 为几何凸函数,据定理 2.1 知 f 为几何凸函数.

例 2 设 $D=(0,+\infty)\times(0,+\infty)$,

$$f(x,y)=\iint_{(u,v)\in D}(x^{-u^2-v^2}+y^{u^2+v^2})ds,(x,y)\in D,$$

则 f 是D 上的几何凸函数.

证明 对于 D 上的任一点(u,v), $x^{-u^2-v^2}$ 和 $y^{u^2+v^2}$ 为几何凸函数,进而 $x^{-u^2-v^2}+y^{u^2+v^2}$ 几何凸函数,据定理 2.1 知 f 为几何凸函数.

定理 2.2 (i)设 $E\subseteq R^n_{++}$, $F\subseteq R^m_{++}$, $z=z(x,y)$在 $E\times F$ 上有定义,且对于任何 $y\in F$, $z=z(x,y)$在 E 上的限制为S-几何凸函数,则

$$u(x)=\int\cdots\int_{y\in F}z(x,y)d\sigma$$

在 E 上的为S-几何凸函数.

(ii)设 $E\subseteq R^n_{++}$, $F\subseteq R^m_{++}$, $z=z(x,y)$在 $E\times F$ 上有定义,且对于任何 $y\in F$, $z=z(x,y)$在 E 上的限制为 S－几何凹函数,则

$$u(x)=\int\cdots\int_{y\in F}z(x,y)d\sigma$$

是 E 上的 S－几何凹函数.

证明 仅证结论(ii).设 $x,w\in E\subseteq R^n_{++}$,且 $\ln x\succ\ln w$,则对于任何 $y\in F$,有

$$0\leq z(x,y)\leq z(w,y),$$

根据定积分性质有

$$u(x)=\int\cdots\int_{y\in F}z(x,y)d\sigma\leq\int\cdots\int_{y\in F}z(w,y)d\sigma=u(w),$$

故 u 在 E 上的为 S－几何凹函数.

下面这个定理是优美的,证法一是文[14]给出的.

定理 2.3 设 $f:[0,b)\to(0,+\infty)$是连续函数,在$(0,b)$上是几何凸函数,那么

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt$$

在$(0,b)$上也是几何凸函数.

证法一:设任取 $x,y\in(0,b)$,根据几何凸函数的定义,只要证

$$F(\sqrt{xy})\leq\sqrt{F(x)F(y)}$$

$$\Leftrightarrow(F(\sqrt{xy}))^2\leq F(x)F(y)$$

即可,由于

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt=\lim_{n\to+\infty}\Big[\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\Big(k\frac{x}{n}\Big)\Big],$$

$$F(\sqrt{xy})=\int_0^{\sqrt{xy}}f(t)dt=\lim_{n\to+\infty}\Big[\frac{\sqrt{xy}}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\Big(k\frac{\sqrt{xy}}{n}\Big)\Big],$$

所以只要证对任一 n,有

$$\Big[\frac{\sqrt{xy}}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\Big(k\frac{\sqrt{xy}}{n}\Big)\Big]^2\leq\Big[\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\Big(k\frac{x}{n}\Big)\Big]\Big[\frac{y}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\Big(k\frac{y}{n}\Big)\Big]$$

即

$$\Big[\sum_{k=0}^{n-1}f\Big(k\frac{\sqrt{xy}}{n}\Big)\Big]^2\leq\Big[\sum_{k=0}^{n-1}f\Big(k\frac{x}{n}\Big)\Big]\Big[\sum_{k=0}^{n-1}f\Big(k\frac{y}{n}\Big)\Big],$$

又因 f 是几何凸函数,所以只要证

$$\left[\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{f(k\frac{x}{n})f(k\frac{y}{n})}\right]^2 \leq [\sum_{k=0}^{n-1}f(k\frac{x}{n})][\sum_{k=0}^{n-1}f(k\frac{y}{n})],$$

即可,而这易由 *Cauchy* 不等式推得.

证法二:因

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \lim_{n\to+\infty}[\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(k\frac{y}{n})],$$

而根据第二章的定理 2.2 的(ii)知 $f(k\frac{x}{n})$ 为 $(0,b)$ 上的几何凸函数,根据第二章的推论 2.1 知 $\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(k\frac{x}{n})$ 为 $(0,b)$ 上的几何凸函数,再由第三章的定理 3.1 即知 F 为几何凸函数.

推论 2.1 设 $f:[0,b)\to[0,+\infty)$ 是可微函数,且 f' 在 $(0,b)$ 上为几何凸函数,则 $f(x)-f(0)$ 是 $(0,b)$ 上的几何凸函数.

这由定理 2.3 直接得到.由定理 2.3 可以得到一大批几何凸函数.

例 3 已知 $y=\tan x, x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 为几何函数,则

$$y = \int_0^x \tan t dt = \ln\sec t\,|_0^x = \ln\sec x$$

在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上为几何凸函数,进而 *Lobacevski's* 函数 $y=\int_0^x \ln\sec t dt$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上为几何凸函数.

例 4 考虑函数

$$y=\begin{cases}\frac{t}{\sin t}, 0<t<\frac{\pi}{2},\\ 1, \quad t=0,\end{cases}$$

其在 $x=0$ 处右连续,且明显在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上为几何凸函数,所以 $y=\int_0^x \frac{t}{\sin t}dt$ 为在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上几何凸函数.

例 5 考虑函数 $y=e^{t^2}, t\in(0,+\infty)$,由其幂级数展开式知为几何凸函数,所以

$$y = \int_0^x e^{t^2}dt$$

在 $(0,+\infty)$ 上几何凸函数,对于任两个正数 x_1,x_2,有

$$(\int_0^{\sqrt{x_1x_2}} e^{t^2}dt)^2 \leq \int_0^{x_1} e^{t^2}dt\int_0^{x_2} e^{t^2}dt$$

成立.

若 f 为几何凹函数,相应结论如何呢? [14]猜想如下:

猜想:设 $f:[0,b)\to(0,+\infty)$是连续函数,在$(0,b)$是几何凹函数,那么

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt$$

在$(0,b)$是几何凹函数.

为此作者得到一个较好的定理2.4.

定理2.4 设定义在$[a,b)\subseteq[0,+\infty)$上的函数 f 是(a,b)上的二阶可微几何凹函数,则

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

在(a,b)是几何凹函数.

证明 因 f 取值为正,所以 F 严格递增,只要证 F 满足第二章的定理3.3的(ii)中的条件,即只要证对于 $x_0\in(a,b)$,有

$$x_0\Big[f'(x_0)\int_a^{x_0}f(t)dt-f^2(x_0)\Big]+f(x_0)\int_a^{x_0}f(t)dt\le 0,$$

亦即

$$[x_0f'(x_0)+f(x_0)]\int_a^{x_0}f(t)dt\le x_0\cdot f^2(x_0),\tag{2.1}$$

若 $x_0f'(x_0)+f(x_0)\le 0$,上式已成立;若 $x_0f'(x_0)+f(x_0)>0$,设集合 $E_x=\{x>0\mid xf'(x)+f(x)>0\}$,显然 $x_0\in E_x$,由函数的连续性知,E_x 也包含一个含 x_0 在内的区间,设这个区间为(x_1,x_2),则 $x_1=a$ 或 $x_1\ne a$ 但 $x_1f'(x_1)+f(x_1)=0$,当后者成立时,在(x_1,x_2)内定义函数

$$G(x)=\frac{xf^2(x)}{xf'(x)+f(x)}-\int_a^x f(t)dt,$$

因

$$G'=\frac{(f^2+2xf\cdot f')(xf'+f)-xf^2\cdot(2f'+xf'')}{(xf'+f)^2}-f$$

$$=-\frac{xf(f\cdot f'-x(f')^2+xf\cdot f'')}{(xf'+f)^2},$$

由于 f 为几何凹函数,所以

$$f\cdot f'-x(f')^2+xf\cdot f''\le 0,G'\ge 0,$$

从而 G 为单调递增,但

$$G(x_1+0)=\lim_{x\to x_1+0}\left(\frac{xf^2(x)}{xf'(x)+f(x)}-\int_a^x f(t)dt\right)=+\infty,$$

这说明了函数 G 不可能单调递增,矛盾.所以 $x_1=a$,因此

$$G(a+0)=\lim_{x\to a+0}\left(\frac{xf^2(x)}{xf'(x)+f(x)}-\int_a^x f(t)dt\right)$$

$$=\lim_{x\to a+0}\frac{xf^2(x)}{xf'(x)+f(x)}\geq 0,$$

再根据 G 的单调性知,对于 $x\in(x_1,x_2)$都有 $G(x)\geq 0$,特别地 $G(x_0)\geq 0$,所以(2.1)式成立,定理得证.

例 6　设 $a\geq 0$ 为常数,则 $y=\int_a^x\frac{\arctan t}{t+5}dt$ 在$(a,+\infty)$上为几何凹函数.

例 6 显然满足推论 2.2 的条件.下面这个定理是对定理 2.3 的推广.

定理 2.5　设 $f(u_1,u_2,\cdots,u_n)$在$\prod_{i=1}^n[0,b_i)$上为连续,在$\prod_{i=1}^n(0,b_i)$上为几何凸函数,$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,则

$$g(x)=\int_0^{x_n}du_n\cdots\int_0^{x_2}du_2\int_0^{x_1}f(u_1,u_2,\cdots,u_n)du_1$$

是$\prod_{i=1}^n(0,b_i)$上的几何凸函数.

证明　由于 f 是连续函数,所以

$$g(x)=\lim_{k\to+\infty}\frac{x_1x_2\cdots x_n}{k^n}\sum_{i_n=1}^k\cdots\sum_{i_2=1}^k\sum_{i_1=1}^k f\left(\frac{i_1x_1}{k},\frac{i_2x_2}{k},\cdots,\frac{i_nx_n}{k}\right),$$

又

$$f\left(\frac{i_1x_1}{k},\frac{i_2x_2}{k},\cdots,\frac{i_nx_n}{k}\right),\sum_{i_n=1}^k\cdots\sum_{i_2=1}^k\sum_{i_1=1}^k f\left(\frac{i_1x_1}{k},\frac{i_2x_2}{k},\cdots,\frac{i_nx_n}{k}\right),$$

$\frac{x_1x_2\cdots x_n}{k^n}\sum_{i_n=1}^k\cdots\sum_{i_2=1}^k\sum_{i_1=1}^k f\left(\frac{i_1x_1}{k},\frac{i_2x_2}{k},\cdots,\frac{i_nx_n}{k}\right)$均为$\prod_{i=1}^n(0,b_i)$上的几何凸函数,故$\lim_{k\to\infty}\frac{x_1x_2\cdots x_n}{k^n}\sum_{i_n=1}^k\cdots\sum_{i_2=1}^k\sum_{i_1=1}^k f\left(\frac{i_1x_1}{k},\frac{i_2x_2}{k},\cdots,\frac{i_nx_n}{k}\right)$为几何凸函数,即 g 是几何凸函数.

第三节　几何凸函数的几何平均不等式

本节要介绍有关几何凸函数的几何平均的几个不等式,其中的定理 3.1、

3.2 和 3.3 由作者和杨定华先生共同得到，记 $\Delta=b-a$，$G_3=\int_a^b f(x)dG$.

引理 3.1 设 $x_1,x_2\in[a,b]\subseteq(0,+\infty)$，$1\leq i\leq n$，则有

$$[a+\frac{i}{n}(\sqrt{x_1x_2}-a)]^2\leq[a+\frac{i}{n}(x_1-a)][a+\frac{i}{n}(x_2-a)].$$

证明 其实只要证明 $f(x)=a+\frac{i}{n}(x-a)=\frac{i}{n}x+(1-\frac{i}{n})a$ 在 $[a,b]$ 上为几何凸函数，这可由第二章的定理 2 的(ⅲ)得出.

定理 3.1 设 $f:[a,b]\to R_{++}$ 为单调递增的几何凸函数，则 $g(x)=\int_a^x f(t)dG$ 是 $[a,b]$ 上的几何凸函数.

证明 任取 $x_1,x_2\in[a,b]$，由引理 1.1 知：

$$g(\sqrt{x_1x_2})=\int_a^{\sqrt{x_1x_2}}f(x)dG=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n f(a+\frac{i}{n}(\sqrt{x_1x_2}-a))},$$

又函数 f 为单调递增，由引理 3.1 和几何凸函数的定义知

$$\begin{aligned}g(\sqrt{x_1x_2})&=\int_a^{\sqrt{x_1x_2}}f(x)dG\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n[f(a+\frac{i}{n}(x_1-a)\cdot f(a+\frac{i}{n}(x_2-a))]^{\frac{1}{2}}}\\&=\left[\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n(f(a+\frac{i}{n}(x_1-a))\cdot f(a+\frac{i}{n}(x_2-a))}\right]^{\frac{1}{2}}\\&=\sqrt{g(x_1)g(x_2)},\end{aligned}$$

故 g 是几何凸函数.

同理可证：

定理 3.2 设 $f:[a,b]\to R_{++}$ 为单调递减的几何凹函数，则是 $g(x)=\int_a^x f(x)dG$ 是 $[a,b]$ 上的几何凹函数.

引理 3.2 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n(a+\frac{i}{n}\Delta)}=\frac{1}{e}b^{\frac{b}{b-a}}a^{\frac{a}{a-b}}$.

证明 在引理 1.1 中，令 $f(x)=x$，则有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n(a+\frac{i}{n}\Delta)}&=\int_a^b xdG=e^{\frac{1}{\Delta}\int_a^b\ln xdx}\\&=e^{\frac{1}{\Delta}[(x\ln x)|_a^b-\int_a^b xd(\ln x)]}=\frac{1}{e}b^{\frac{b}{b-a}}a^{\frac{a}{a-b}}.\end{aligned}$$

定理 3.3 设 $f:[a,b]\to R_{++}$ 为几何凸函数，则

$$\int_a^b f(x)dG \geq f\left(\frac{1}{e}b^{\frac{b}{b-a}}a^{\frac{a}{a-b}}\right), \tag{3.1}$$

若 $f:[a,b]\to R_{++}$ 为几何凹函数,则不等式反向.

证明 由引理 1.1 和几何凸函数的定义知

$$\int_a^b f(x)dG = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n f(a+\frac{i}{n}\Delta)} \geq \lim_{n\to+\infty} f(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n (a+\frac{i}{n}\Delta)}),$$

再由引理 3.2 知(3.1)式成立;同理可证 f 为几何凹函数时的情形.

定理 3.3 给出了几何凸函数的几何平均一个下界,下面讨论其上界,为此先证明如下的

引理 3.3 设 $0<a<b$, $a_n(i)=a+\frac{i}{n}\Delta$, $i=1,2,\cdots,n$,则对于满足第五章引理 6.2 的 k_0(这里记为 k_n),有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{k_n}{n}=\frac{b}{b-a}-\frac{1}{\ln b-\ln a}.$$

证明 根据 k_n 的定义有

$$a^{n-k_n}b^{k_n} \leq \prod_{i=1}^n (a+\frac{i}{n}\Delta) < a^{n-k_n-1}b^{k_n+1},$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{k_n} \leq \prod_{i=1}^n (1+\frac{i}{n}\cdot\frac{b-a}{a}) < (\frac{b}{a})^{k_n+1},$$

$$k_n \leq \log_{\frac{b}{a}}(\prod_{i=1}^n (1+\frac{i}{n}\cdot\frac{b-a}{a})) < k_n+1,$$

所以 k_n 取 $\log_{\frac{b}{a}}(\prod_{i=1}^n(1+\frac{i}{n}\cdot\frac{b-a}{a}))$的整数部分,又

$$\log_{\frac{b}{a}}(\prod_{i=1}^n (1+\frac{i}{n}\cdot\frac{b-a}{a}))-1 < k_n \leq \log_{\frac{b}{a}}(\prod_{i=1}^n (1+\frac{i}{n}\cdot\frac{b-a}{a})),$$

$$\frac{1}{n}[\log_{\frac{b}{a}}(\prod_{i=1}^n (1+\frac{i}{n}\cdot\frac{b-a}{a}))-1] < \frac{k_n}{n}$$

$$\leq \frac{1}{n}\log_{\frac{b}{a}}(\prod_{i=1}^n (1+\frac{i}{n}\cdot\frac{b-a}{a})),$$

$$\log_{\frac{b}{a}}(\prod_{i=1}^n (1+\frac{i}{n}\cdot\frac{b-a}{a}))^{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n} < \frac{k_n}{n}$$

$$\leq \log_{\frac{b}{a}}(\prod_{i=1}^n (1+\frac{i}{n}\cdot\frac{b-a}{a}))^{\frac{1}{n}},$$

$$\log_{\frac{b}{a}}\frac{1}{a}(\prod_{i=1}^n (a+\frac{i}{n}\Delta))^{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n} < \frac{k_n}{n} \leq \log_{\frac{b}{a}}\frac{1}{a}(\prod_{i=1}^n (a+\frac{i}{n}\Delta))^{\frac{1}{n}},$$

由极限的夹逼定理即知

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{k_n}{n}=\log_{\frac{b}{a}}\left(\frac{1}{ae}\cdot b^{\frac{b}{b-a}}a^{\frac{a}{a-b}}\right)=\frac{b}{b-a}-\frac{1}{\ln b-\ln a}.$$

定理 3.4 设 $f:[a,b]\to R_{++}$ 为几何凸函数，则

$$\int_a^b f(x)dG\leq[f(a)]^{\frac{a}{a-b}-\frac{1}{\ln a-\ln b}}[f(b)]^{\frac{b}{b-a}-\frac{1}{\ln b-\ln a}}.$$

证明 设 f 在$[a,b]$最大值为 M，根据第四章的推论 5.1 和第五章的引理 6.2，知对任何正整数 n 有

$$\int_a^b f(x)dG=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n f\left(a+\frac{i}{n}\Delta\right)}$$

$$\leq\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{f^{n-k_n}(a)\cdot f^{k_n}(b)\cdot f\left(\frac{\prod_{i=1}^n\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right)}{a^{n-k_n}b^{k_n}}\right)}$$

$$\leq\lim_{n\to+\infty}f^{\frac{n-k_n}{n}}(a)f^{\frac{k_n}{n}}(b)M^{\frac{1}{n}}=[f(a)]^{\frac{a}{a-b}-\frac{1}{\ln a-\ln b}}[f(b)]^{\frac{b}{b-a}-\frac{1}{\ln b-\ln a}}.$$

把以上两个定理合起来即为：

定理 3.5 若 $f:[a,b]\to R_{++}$ 为几何凸函数，则有

$$f\left(\frac{1}{e}b^{\frac{b}{b-a}}a^{\frac{a}{a-b}}\right)\leq\int_a^b f(x)dG$$

$$\leq[f(a)]^{\frac{a}{a-b}-\frac{1}{\ln a-\ln b}}[f(b)]^{\frac{b}{b-a}-\frac{1}{\ln b-\ln a}}.$$

同理可证

定理 3.6 若 $f:[a,b]\to R_{++}$ 为几何凹函数，则有

$$[f(a)]^{\frac{a}{a-b}-\frac{1}{\ln a-\ln b}}[f(b)]^{\frac{b}{b-a}-\frac{1}{\ln b-\ln a}}$$

$$\leq\int_a^b f(x)dG\leq f\left(\frac{1}{e}b^{\frac{b}{b-a}}a^{\frac{a}{a-b}}\right).$$

推论 3.1 设若 $f:[a,b]\to R_{++}$ 为几何凹函数，则

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\geq[f(a)]^{\frac{a}{a-b}-\frac{1}{\ln a-\ln b}}[f(b)]^{\frac{b}{b-a}-\frac{1}{\ln b-\ln a}}.$$

这是因为$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b f(x)dG$ 所致.

第四节 一个 Hadamard 型的积分不等式

十九世纪末，在凸函数性质研究中，*Hadamard* 得到了：若 $f:[a,b]\to R$

为凸函数，则有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{4.1}$$

本节的目的就是对几何凸函数建立一个相应的不等式，设 $\Delta=b-a$.

定理 4.1 设函数 $f:[a,b]\to R_{++}$ 为几何凸函数，则

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le \left(\frac{1}{\ln b-\ln a}-\frac{a}{b-a}\right)f(a)+\left(\frac{b}{b-a}-\frac{1}{\ln b-\ln a}\right)f(b).$$

证明 根据第四章的推论 4.2，知 $f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)$ 为 $[a,b]^n$ 上几何凸函数，又由第五章的引理 6.2，及第四章的定理 5.3，有

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{i}{n}\Delta\right)\le (n-k_n-1)f(a)+k_nf(b)+f\left(\frac{\prod_{i=1}^{n}\left(a+\frac{i}{n}\Delta\right)}{a^{n-k_n-1}b^{k_n}}\right),$$

$$\frac{\Delta}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{i}{n}\Delta\right)\le \Delta\left[\frac{n-k_n-1}{n}f(a)+\frac{k_n}{n}f(b)+\frac{M}{n}\right],$$

所以

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\Delta}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{i}{n}\Delta\right)\\ &\le \lim_{n\to+\infty}\Delta\left[\frac{n-k_n-1}{n}f(a)+\frac{k_n}{n}f(b)+\frac{M}{n}\right]\\ &=(b-a)\left[\left(\frac{1}{\ln b-\ln a}-\frac{a}{b-a}\right)f(a)+\left(\frac{b}{b-a}-\frac{1}{\ln b-\ln a}\right)f(b)\right].\end{aligned}$$

定理 4.1 得证.

又从第三节中知，对于几何凸函数 $f:[a,b]\to R_{++}$，有

$$f\left(\frac{1}{e}b^{\frac{b}{b-a}}a^{\frac{a}{a-b}}\right)\le exp\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(\ln x)dx\right]\le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

其中 $\frac{1}{e}b^{\frac{b}{b-a}}a^{\frac{a}{a-b}}$ 为 a,b 的指数平均（见[5]的第 41 页），所以有以下定理.

定理 4.2 设 $f:[a,b]\to R_{++}$ 是一个几何凸函数,则有

$$f\left(\frac{1}{e}b^{\frac{b}{b-a}}a^{\frac{a}{a-b}}\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$\leq\left(\frac{1}{\ln b-\ln a}-\frac{a}{b-a}\right)f(a)+\left(\frac{b}{b-a}-\frac{1}{\ln b-\ln a}\right)f(b),\qquad(4.2)$$

下面的(ⅰ)、(ⅱ)是[5]的第 41 页中的几个已知结果.

推论 4.1 设 $b>a>0$,则有

(ⅰ) $\sqrt{ab}\leq\dfrac{b-a}{\ln b-\ln a}\leq\dfrac{1}{e}b^{\frac{b}{b-a}}a^{\frac{a}{a-b}}\leq\dfrac{4}{9}\left(\dfrac{a+b+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^2$.

(ⅱ) $\dfrac{a+b+2\sqrt{ab}}{4}\leq\dfrac{1}{e}b^{\frac{b}{b-a}}a^{\frac{a}{a-b}}\leq\dfrac{a+b}{2}$.

(ⅲ) 当 $n>1$ 时,有

$$\left[\frac{(n-1)(b-a)}{n\left(b^{\frac{n-1}{n}}-a^{\frac{n-1}{n}}\right)}\right]^n\leq\frac{1}{e}b^{\frac{b}{b-a}}a^{\frac{a}{a-b}}\leq\left[\frac{n\left(b^{\frac{1+n}{n}}-a^{\frac{1+n}{n}}\right)}{(n+1)(b-a)}\right]^n.\qquad(4.3)$$

证明 在(4.2)式的前一不等式中,分别令几何凸函数 $f(x)=x,\dfrac{1}{x},\sqrt{x},\dfrac{1}{\sqrt{x}},\sqrt[n]{x}$,则有

$$\frac{1}{e}b^{\frac{b}{b-a}}a^{\frac{a}{a-b}}\leq\frac{a+b}{2},$$

$$\frac{b-a}{\ln b-\ln a}\leq\frac{1}{e}b^{\frac{b}{b-a}}a^{\frac{a}{a-b}},$$

$$\frac{1}{e}b^{\frac{b}{b-a}}a^{\frac{a}{a-b}}\leq\frac{4}{9}\left(\frac{a+b+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^2,$$

$$\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{4}\leq\frac{1}{e}b^{\frac{b}{b-a}}a^{\frac{a}{a-b}},$$

$$\frac{1}{e}b^{\frac{b}{b-a}}a^{\frac{a}{a-b}}\leq\left[\frac{n\left(b^{\frac{1+n}{n}}-a^{\frac{1+n}{n}}\right)}{(n+1)(b-a)}\right]^n,$$

又在(4.2)式的后一不等式中,分别令几何凸函数 $f(x)=\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{\sqrt[n]{x}}$,则有

$$\sqrt{ab}\leq\frac{b-a}{\ln b-\ln a}$$

$$\left[\frac{(n-1)(b-a)}{n\left(b^{\frac{n-1}{n}}-a^{\frac{n-1}{n}}\right)}\right]^n\leq\frac{1}{e}b^{\frac{b}{b-a}}a^{\frac{a}{a-b}},$$

详细计算过程在此从略.

当 f 既为凸函数又为几何凸函数时,(4.1)式与(4.2)式孰强孰弱呢?因 $\frac{1}{e}b^{\frac{b}{b-a}}a^{\frac{a}{a-b}}\le\frac{a+b}{2}$,又用导数可证明

$$\frac{1}{\ln b-\ln a}-\frac{a}{b-a}\le\frac{1}{2},$$

由此不难用在 $[1,e]$ 上的函数 $f(x)=x^2$ 和 $g(x)=\frac{1}{x^2}$ 两者来验证,可以发现(4.1)式与(4.2)式各有强弱.

定理 4.3 设 $z=f(x,y)$ 为 $D=[a,b]\times[c,d]\subseteq R_{++}^2$ 上的几何凸函数,则有

$$f\left(\frac{1}{e}b^{\frac{b}{b-a}}a^{\frac{a}{a-b}},\frac{1}{e}d^{\frac{d}{d-c}}c^{\frac{c}{c-d}}\right)\le\frac{1}{(b-a)(c-d)}\iint_D f(x,y)ds.$$

由于二元几何凸函数在一元上的限制为几何凸函数,由定理 4.2 易证定理 4.3.

第五节 关于复合函数的几个不等式

定理 5.1 设函数 f 为 $[a,b]$ 上的几何凸函数,$p(x)\ge0,x\in[a,b]$,且 $\int_a^b p(x)dx=1$,记 $e^x=\exp(x)$,$\Delta=b-a$,则对于 f 的加权几何平均,有

$$\exp(\int_a^b p(x)\cdot\ln f(x)dx)\ge f[\exp(\int_a^b p(x)\ln xdx)].$$

证明 由引理 1.1 有

$$\exp(\int_a^b p(x)\cdot\ln f(x)dx)=\exp(\frac{1}{\Delta}\int_a^b \ln f(x)^{\Delta p(x)}dx),$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n\left[f\left(a+\frac{i}{n}\Delta\right)\right]^{\Delta\cdot p\left(a+\frac{i}{n}\Delta\right)}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left\{\prod_{i=1}^n\left[f\left(a+\frac{i}{n}\Delta\right)\right]^{\frac{p\left(a+\frac{i}{n}\Delta\right)}{\sum_{i=1}^n p\left(a+\frac{i}{n}\Delta\right)}}\right\}^{\frac{\Delta\sum_{i=1}^n p\left(a+\frac{i}{n}\Delta\right)}{n}}$$

由几何凸函数的定义,有

$$\exp(\int_a^b p(x)\cdot\ln f(x)dx)$$

$$\geq \lim_{n\to+\infty}\left\{f\left[\prod_{i=1}^{n}\left(a+\frac{i}{n}\Delta\right)^{\frac{p\left(a+\frac{i}{n}\Delta\right)}{\sum_{i=1}^{n}p\left(a+\frac{i}{n}\Delta\right)}}\right]\right\}^{\frac{\Delta\sum_{i=1}^{n}p\left(a+\frac{i}{n}\Delta\right)}{n}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left\{f\left[\prod_{i=1}^{n}\left(a+\frac{i}{n}\Delta\right)^{\frac{p\left(a+\frac{i}{n}\Delta\right)}{\sum_{i=1}^{n}p\left(a+\frac{i}{n}\Delta\right)}}\right]\right\}^{\int_a^b p(x)dx}$$

$$=f\left[\lim_{n\to+\infty}\prod_{i=1}^{n}\left(a+\frac{i}{n}\Delta\right)^{\frac{p\left(a+\frac{i}{n}\Delta\right)}{\sum_{i=1}^{n}p\left(a+\frac{i}{n}\Delta\right)}}\right]$$

$$=f\left\{\lim_{n\to+\infty}\left[\prod_{i=1}^{n}\left(a+\frac{i}{n}\Delta\right)^{\frac{p\left(a+\frac{i}{n}\Delta\right)}{n}}\right]^{\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}p\left(a+\frac{i}{n}\Delta\right)}}\right\}$$

$$=f\left[\left(\exp\frac{1}{\Delta}\int_a^b \ln x^{p(x)}dx\right)^{\frac{\Delta}{\int_a^b p(x)dx}}\right]$$

$$=f\left(\exp\int_a^b \ln x^{p(x)}dx\right).$$

故有

$$\exp\left(\int_a^b p(x)\cdot\ln f(x)dx\right)\geq f\left[\exp\left(\int_a^b p(x)\cdot\ln x dx\right)\right].$$

定理 5.1 推广了定理 3.3,实际上当 $p(x)=\frac{1}{b-a}$时,定理 5.1 就是定理 3.3.

定理 5.2 设函数 $f:[a,b]\to R_{++}$ 是一个几何凹函数,$p(x)\geq 0, x\in[a,b]$,且 $\int_a^b p(x)dx=1$,则对于 f 的加权几何平均,有

$$\exp\left(\int_a^b p(x)\cdot\ln f(x)dx\right)\leq f\left[\exp\left(\int_a^b p(x)\ln x dx\right)\right]$$

成立.

证明 因$\frac{1}{f(x)}$为$[a,b]$上的几何凸函数,于是由定理 5.1 得

$$\exp\left(\int_a^b p(x)\cdot\ln\frac{1}{f(x)}dx\right)\geq\left\{f\left[\exp\left(\int_a^b p(x)\ln x dx\right)\right]\right\}^{-1},$$

即

$$\exp\left(-\int_a^b p(x)\cdot\ln f(x)dx\right)\geq\left\{f\left[\exp\left(\int_a^b p(x)\ln x dx\right)\right]\right\}^{-1}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\exp\left(\int_a^b p(x)\cdot\ln f(x)dx\right)\right\}^{-1}\geq\left\{f\left[\exp\left(\int_a^b p(x)\ln x dx\right)\right]\right\}^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \exp\left(\int_a^b p(x)\cdot \ln f(x)dx\right)\leq f\left[\exp\left(\int_a^b p(x)\ln x dx\right)\right].$$

引理 5.1　设函数 $f(x)>0, x\in[a,b]$，则

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx \leq \ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)$$

成立。

这是[5]中第 385 页的一个结果。

定理 5.3　设函数 f 是 $[a,b](\subseteq(0,+\infty))$ 上的几何凸函数，则有

（ⅰ）$\int_a^b f^{\frac{1}{x}}(x)dx \geq (b-a)\cdot\left[f(\sqrt{ab})\right]^{\frac{\ln b-\ln a}{b-a}}$；

（ⅱ）$\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx \geq (\ln b-\ln a)\cdot f(\sqrt{ab})$.　　(5.1)

证明　（ⅰ）根据第二章的定理 3.2 知：$\ln f(e^x)$ 在 $[\ln a,\ln b]$ 上为凸函数，所以由 *Hadamard* 不等式有

$$\ln f\left(\exp\left(\frac{\ln a+\ln b}{2}\right)\right)\leq \frac{1}{\ln b-\ln a}\int_{\ln a}^{\ln b}\ln f(e^x)dx, \tag{5.2}$$

令 $e^x=t$，则有

$$\ln f(\sqrt{ab})\leq \frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b \frac{\ln f(t)}{t}dt,$$

即

$$\ln f(\sqrt{ab})\leq \frac{b-a}{\ln b-\ln a}\cdot\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f^{\frac{1}{t}}(t)dt,$$

再由引理 5.1 知

$$\ln f(\sqrt{ab})\leq \frac{b-a}{\ln b-\ln a}\cdot\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f^{\frac{1}{t}}(t)dt\right),$$

即

$$\left[f(\sqrt{ab})\right]^{\frac{\ln b-\ln a}{b-a}}\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f^{\frac{1}{t}}(t)dt,$$

$$(b-a)\left[f(\sqrt{ab})\right]^{\frac{\ln b-\ln a}{b-a}}\leq \int_a^b f^{\frac{1}{t}}(t)dt.$$

（ⅱ）由(5.2)和引理 5.1 有

$$\ln f\left(\exp\left(\frac{\ln a+\ln b}{2}\right)\right)\leq \ln\left(\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_{\ln a}^{\ln b} f(e^x)dx\right)$$

令 $e^x=t$，即得

$$f(\sqrt{ab})\leq \frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b \frac{f(t)}{t}dt.$$

定理 5.4 设函数 f 是 $[a,b]\subseteq(0,+\infty)$ 上的几何凹函数,则有

(ⅰ) $\int_a^b (f(x))^{\frac{1}{x}}dx \geq (b-a)\cdot\left(\sqrt{f(a)f(b)}\right)^{\frac{\ln b-\ln a}{b-a}}$;

(ⅱ) $\int_a^b \frac{f(x)}{x}dx \geq (\ln b-\ln a)\cdot\sqrt{f(a)f(b)}$. (5.3)

证明 (ⅰ)根据第二章的定理 3.2 知:$\ln f(e^x)$ 在 $[\ln a,\ln b]$ 上为凹函数,所以由 *Hadamard* 不等式有

$$\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_{\ln a}^{\ln b}\ln f(e^x)dx \geq \frac{\ln f(\exp(\ln a))+\ln f(\exp(\ln b))}{2},$$

令 $e^x=t$,可得

$$\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b \ln(f(t))^{\frac{1}{t}}dt \geq \frac{\ln f(a)+\ln f(b)}{2},$$

再由引理 5.1 知

$$\frac{b-a}{\ln b-\ln a}\ln\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b (f(t))^{\frac{1}{t}}dt\right] \geq \frac{\ln f(a)+\ln f(b)}{2}$$

$$\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b (f(t))^{\frac{1}{t}}dt\right)^{\frac{b-a}{\ln b-\ln a}} \geq \sqrt{f(a)f(b)}$$

$$\int_a^b (f(t))^{\frac{1}{t}}dt \geq (b-a)\cdot\left(\sqrt{f(a)f(b)}\right)^{\frac{\ln b-\ln a}{b-a}}.$$

(ⅱ)类似可证,此处从略.

推论 5.1 (ⅰ)设函数 f 是 $[a,b](\subseteq(0,+\infty))$ 上的向何凸函数,则有

$$\int_a^b f(x)dx \geq (\ln b-\ln a)\sqrt{ab}\cdot f(\sqrt{ab}).$$

(ⅱ)设函数 f 是 $[a,b](\subseteq(0,+\infty))$ 上的几何凹函数,则有

$$\int_a^b f(x)dx \geq (\ln b-\ln a)\sqrt{ab}\cdot\sqrt{f(a)f(b)}.$$

证明 (ⅰ)因 f 为几何凸函数,所以 $xf(x)$ 为几何凸函数,利用(5.1)式有

$$\int_a^b \frac{xf(x)}{x}dx \geq (\ln b-\ln a)\sqrt{ab}\cdot f(\sqrt{ab}).$$

即

$$\int_a^b f(x)dx \geq (\ln b-\ln a)\sqrt{ab}\cdot f(\sqrt{ab}).$$

(ⅱ)因 f 为几何凹函数,所以 $xf(x)$ 为几何凹函数,利用(5.3)式有

$$\int_a^b \frac{xf(x)}{x}dx \geq (\ln b - \ln a) \cdot \left(\sqrt{abf(a)f(b)}\right),$$

故

$$\int_a^b f(x)dx \geq (\ln b - \ln a)\sqrt{ab} \cdot \sqrt{f(a)f(b)}.$$

第六节　几何凸函数的定积分的另一个上界

在定理 4.1 中，我们给出了几何凸函数定积分的一个上界，在推论 3.1 和推论 5.1 中，又得到了几何凹函数定积分的二个下界，本节将继续推导一些结果.

引理 6.1　设 $0<a<b$，则对于$[a,b]$内的任一实数 x，存在 $\alpha(x)\in(0,1)$，使得

$$x = a^{1-\alpha(x)}b^{\alpha(x)} \tag{6.1}$$

成立，且函数 $x\to\alpha(x)$为严格单调递增函数.

证明　设

$$\alpha(x) = \log_{\frac{b}{a}}\frac{x}{a}, \tag{6.2}$$

则 $x\to\alpha(x)$为严格单调递增函数，且

$$\alpha(x) = \log_{\frac{b}{a}}\frac{x}{a} > \log_{\frac{b}{a}}1 = 0,$$

和

$$\alpha(x) = \log_{\frac{b}{a}}\frac{x}{a} < \log_{\frac{b}{a}}\frac{b}{a} = 1,$$

对(6.2)式整理即为(6.1)式，证毕.

定理 6.1　设实数 a,x_1,x_2,b，满足 $0<a\leq x_1<x_2\leq b$，且设 $\alpha_1=\log_{\frac{b}{a}}\frac{x_1}{a}$，$\alpha_2=\log_{\frac{b}{a}}\frac{x_2}{a}$，函数 f 在$[a,b]$上为几何凸函数，则

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

$$\leq \frac{af(a)}{\ln(bf(b))-\ln(af(a))}\cdot\ln\frac{b}{a}\cdot\left[\left(\frac{bf(b)}{af(a)}\right)^{\alpha_2}-\left(\frac{bf(b)}{af(a)}\right)^{\alpha_1}\right],$$

证明　在 $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$ 中，令 $\alpha(x)=\log_{\frac{b}{a}}\frac{x}{a}$，$\alpha_1=\log_{\frac{b}{a}}\frac{x_1}{a}$，$\alpha_2=\log_{\frac{b}{a}}\frac{x_2}{a}$，由

引理 6.1 知,对于 $x\in(x_1,x_2)$,有 $\alpha_1<\alpha(x)<\alpha_2$,且 $x=a^{1-\alpha}b^{\alpha}$,故有

$$\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}f(a^{1-\alpha}b^{\alpha})\cdot a^{1-\alpha}b^{\alpha}\cdot\ln\frac{b}{a}d\alpha,$$

由几何凸函数的定义知

$$\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx\overset{(6.3)}{\leq}\ln\frac{b}{a}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}f^{1-\alpha}(a)f^{\alpha}(b)\cdot a^{1-\alpha}b^{\alpha}d\alpha$$

$$=af(a)\cdot\ln\frac{b}{a}\int_{\alpha_1}^{\alpha_1}\left(\frac{bf(b)}{af(a)}\right)^{\alpha}d\alpha$$

$$=\frac{af(a)}{\ln\dfrac{bf(b)}{af(a)}}\cdot\ln\frac{b}{a}\cdot\left(\frac{bf(b)}{af(a)}\right)^{\alpha}\Bigg|_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

$$=\frac{af(a)}{\ln\dfrac{bf(b)}{af(a)}}\cdot\ln\frac{b}{a}\cdot\left[\left(\frac{bf(b)}{af(a)}\right)^{\alpha_2}-\left(\frac{bf(b)}{af(a)}\right)^{\alpha_1}\right]$$

$$=\frac{af(a)}{\ln(bf(b))-\ln(af(a))}\cdot\ln\frac{b}{a}\cdot\left[\left(\frac{bf(b)}{af(a)}\right)^{\alpha_2}-\left(\frac{bf(b)}{af(a)}\right)^{\alpha_1}\right],$$

等号成立当且仅当(6.3)式等号成立,因而等号成立当且仅当 f 为幂函数或常函数,证毕.

推论 6.1 设 $0<a<b$,函数 f 在$[a,b]$上为几何凸函数,则当 $x\in[a,b]$时,有

$$\int_a^x f(t)dt\leq\frac{af(a)}{\ln(bf(b))-\ln(af(a))}\cdot\ln\frac{x}{a}\cdot\left[\left(\frac{xf(x)}{af(a)}\right)^{\log_{\frac{b}{a}}\frac{x}{a}}-1\right].\tag{6.4}$$

在定理 6.1 中,令 $x_1=a,x_2=x$,则 $\alpha_1=0$,此时易得(6.4)式.

推论 6.2 设 $0<a<b$,函数 f 在$[a,b]$上为几何凸函数,则

$$\int_a^x f(t)dt\leq\frac{bf(b)-af(a)}{\ln(bf(b))-\ln(af(a))}\cdot\ln\frac{b}{a}.\tag{6.5}$$

定理 6.1 中,令 $x_1=a,x_2=b$,则 $\alpha_1=0,\alpha_2=1$ 此时易得(6.5)式.

利用几何凹函数的定义,几乎同理可证以下结论:

定理 6.2 设实数 a,x_1,x_2,b,满足 $0<a\leq x_1<x_2\leq b$,且设 $\alpha_1=\log_{\frac{b}{a}}\frac{x_1}{a}$,$\alpha_2=\log_{\frac{b}{a}}\frac{x_2}{a}$,函数 f 在$[a,b]$上为几何凹函数,则

$$\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx$$

$$\geq\frac{af(a)}{\ln(bf(b))-\ln(af(a))}\cdot\ln\frac{b}{a}\cdot\left[\left(\frac{bf(b)}{af(a)}\right)^{\alpha_2}-\left(\frac{bf(b)}{af(a)}\right)^{\alpha_1}\right].\tag{6.6}$$

推论 6.3　设 $0<a<b$，函数 f 在 $[a,b]$ 上为几何凹函数，则当 $x\in[a,b]$ 时，有

$$\int_a^x f(t)dt \geq \frac{af(a)}{\ln(bf(b))-\ln(af(a))}\cdot \ln\frac{x}{a}\cdot\left[\left(\frac{xf(x)}{af(a)}\right)^{\log_{\frac{b}{a}}\frac{x}{a}}-1\right]. \tag{6.7}$$

推论 6.4　设 $0<a<b$，函数 f 在 $[a,b]$ 上为几何凹函数，则

$$\int_a^b f(t)dt \geq \frac{bf(b)-af(a)}{\ln(bf(b))-\ln(af(a))}\cdot \ln\frac{b}{a}. \tag{6.8}$$

定理 4.1 和推论 6.2 分别介绍了几何凸函数定积分的二个上界，推论 3.1、推论 5.1 和推论 6.4 也介绍几何凹函数定积分的三个下界，它们之间的大小如何呢？作为一个问题让读者思考.

推论 6.5　设 $b\in(0,\frac{\pi}{2})$，则

(ⅰ) $\tan b\geq b\geq \sin b$；

(ⅱ) $2(b\sin b+\cos b-1)\geq b^2\cos b$；

(ⅲ) $3\sin b-3b\cos b\geq b^2\sin b$；

(ⅳ) $3\tan b-3b\leq b\tan^2 b$.

证明　(ⅰ)由第一章的推论 3.1 知，$y=\cos x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上是几何凹函数，令 $0<a<b<\frac{\pi}{2}$，代入(6.8)式有

$$\int_a^b \cos t dt \geq \frac{b\cos b-a\cos a}{\ln(b\cos b)-\ln(a\cos a)}\cdot\ln\frac{b}{a},$$

$$\sin b-\sin a\geq (b\cos b-a\cos a)\frac{\ln b-\ln a}{\ln(b\cos b)-\ln(a\cos a)},$$

上式中令 $a\to 0$ 有

$$\sin b\geq b\cos b\lim_{a\to 0}\frac{\ln b-\ln a}{\ln(b\cos b)-\ln(a\cos a)},$$

$$\sin b\geq b\cos b\lim_{a\to 0}\frac{-\frac{1}{a}}{-\frac{1}{a\cos a}(\cos a-a\sin a)},$$

$$\sin b\geq b\cos b,$$

$$\tan b\geq b.$$

又 $y=\sec^2 x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上是几何凸函数，代入(6.5)式后有

$$\int_a^b \sec^2 x dt \leq \frac{b\sec^2 b - a\sec^2 a}{\ln(b\sec^2 b) - \ln(a\sec^2 a)} \cdot \ln\frac{b}{a},$$

$$\tan b - \tan a \leq (b\sec^2 b - a\sec^2 a)\frac{\ln b - \ln a}{\ln(b\sec^2 b) - \ln(a\sec^2 a)},$$

令 $a \to 0$ 可得

$$\tan b \leq b\sec^2 b \cdot \lim_{a\to 0}\frac{\ln b - \ln a}{\ln(b\sec^2 b) - \ln(a\sec^2 a)},$$

$$\tan b \leq b\sec^2 b \cdot \lim_{a\to 0}\frac{-\frac{1}{a}}{-\frac{1}{a\sec^2 a}(\sec^2 a + 2a\sec^2 a\tan a)},$$

$$\tan b \leq b\sec^2 b,$$

$$\sin 2b \leq 2b,$$

在 $2b$ 处用 b 代入，即知结论(ⅰ)为真.

(ⅱ)因 $y = x\cos x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上，为两个几何凹函数的乘积，也是几何凹函数，代入(6.8)式后，再令 $a \to 0$ 可得

$$2(b\sin b + \cos b - 1) \geq b^2\cos b,$$

详细过程在此略.

(ⅲ)因 $y = x\sin x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上，为两个几何凹函数的乘积，也是几何凹函数，代入(6.8)式后，再令 $a \to 0$ 可得

$$3\sin b - 3b\cos b \geq b^2\sin b,$$

详细过程在此略.

(ⅳ)因 $y = \tan^2 x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上几何凸函数，代入(6.5)式后，再令 $a \to 0$ 可得

$$3\tan b - 3b \leq b\tan^2 b.$$

推论 6.6

(ⅰ)设 $b \in (0,1)$，则 $2\sqrt{1-b^2} + b\arcsin b \leq 2$；

(ⅱ)设 $b \in R_{++}$，则 $b\arctan b \geq \ln(1+b^2)$；

(ⅲ)设 $n \in N_{++}, b \in R_{++}$，则 $e^b \geq 1 + b + \frac{b^2}{2!} + \cdots + \frac{b^n}{n!}$；

(ⅳ)设 $n \in N_{++}, b \in R_{++}$，则

$$1-b+\frac{b^2}{2!}-\cdots-\frac{b^{2n+1}}{(2n+1)!}\leq e^{-b}\leq 1-b+\frac{b^2}{2!}-\cdots+\frac{b^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

证明 (i)由第二章的推论 3.2 知，$y=\arcsin x$ 在$(0,1)$上为几何凸函数，代入(6.5)式后，再令 $a\to 0$ 可得

$$2\sqrt{1-b^2}+b\arcsin b\leq 2,$$

详细过程在此略.

(ii)由第二章的推论 3.2 知，$y=\arctan x$ 在$(0,+\infty)$上为几何凹函数，代入(6.8)式后，再令 $a\to 0$ 可得

$$b\arctan b\geq \ln(1+b^2),$$

详细过程在此略.

(iii)由多次分部积分知

$$\int n^n e^{-x}dx=-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}, \tag{6.9}$$

又易知函数 $y=x^n e^{-x}$ 在$(0,+\infty)$上为几何凹函数，把其代入(6.8)式，再利用(6.9)式得

$$-e^{-b}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}b^{n-k}+e^{-a}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}a^{n-k}$$
$$\geq\frac{b^{n+1}e^{-b}-a^{n+1}e^{-a}}{\ln(b^{n+1}e^{-b})-\ln(a^{n+1}e^{-a})}\cdot\ln\frac{b}{a},$$

令 $a\to 0$ 可得

$$-e^{-b}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}b^{n-k}+n!$$
$$\geq b^{n+1}e^{-b}\lim_{a\to 0^+}\frac{\ln b-\ln a}{\ln(b^{n+1}e^{-b})-\ln(a^{n+1}e^{-a})},$$

$$-e^{-b}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}b^{n-k}+n!$$

$$\geq b^{n+1}e^{-b}\lim_{a\to 0^+}\frac{-\frac{1}{a}}{-\frac{1}{a^{n+1}e^{-a}}((n+1)a^n e^{-a}-a^{n+1}e^{-a})},$$

$$-e^{-b}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}b^{n-k}+n!\geq\frac{1}{n+1}b^{n+1}e^{-b},$$

整理即知结论(iii)成立.

(iv)设 $m\in N_{++}$，由多次分部积分得

$$\int x^m e^x dx = e^x \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{m!}{(m-k)!} x^{m-k}, \tag{6.10}$$

又易知函数 $y = x^m e^x$ 在$(0, +\infty)$上为几何凸函数，把其代入(6.5)式后，再利用(6.10)式得

$$e^b \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{m!}{(m-k)!} b^{m-k} - e^a \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{m!}{(m-k)!} a^{m-k}$$
$$\leq \frac{b^{m+1} e^b - a^{m+1} e^a}{\ln(b^{m+1} e^b) - \ln(a^{m+1} e^a)} \cdot \ln \frac{b}{a},$$

再令 $a \to 0$ 可得

$$e^b \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{m!}{(m-k)!} b^{m-k} - (-1)^m m! \leq \frac{1}{m+1} b^{m+1} e^b, \tag{6.11}$$

由于 $m \in N_{++}$ 的任意性，当 m 为偶数 $2n$ 时，整理(6.11)式可得

$$e^b \leq \frac{1}{1 - b + \frac{b^2}{2!} - \cdots + \frac{b^{2n+1}}{(2n+1)!}};$$

当 m 为奇数 $2n+1$ 时，整理(6.11)式可得

$$\frac{1}{1 - b + \frac{b^2}{2!} - \cdots - \frac{b^{2n+1}}{(2n+2)!}} \leq e^b,$$

至此知结论(Ⅳ)成立.

下面介绍一个判断几何凸(凹)函数的充分必要条件.

定理 6.3 设实数 a, b 满足 $0 < a < b$，f 是$[a, b]$上的正值函数，则

(ⅰ) f 为几何凸函数的充分必要条件为：任取$[a, b]$两点 c, d，$c < d$ 时，有

$$\int_c^b f(t) dt \leq \frac{df(d) - cf(c)}{\ln(df(d)) - \ln(cf(c))} \cdot \ln \frac{d}{c}.$$

(ⅱ) f 为几何凹函数的充分必要条件为：任取$[a, b]$两点 c, d，$c < d$ 时，有

$$\int_c^d f(t) dt \geq \frac{df(d) - cf(c)}{\ln(df(d)) - \ln(cf(c))} \cdot \ln \frac{d}{c}.$$

证明 (ⅰ) 若 f 不是几何凸函数，存在 $u, v \in [a, b]$，$u < v$，和 $\alpha_0 \in (0, 1)$，使得

$$f(u^{1-\alpha_0} v^{\alpha_0}) > f^{1-\alpha_0}(u) \cdot f^{\alpha_0}(v),$$

则存在区间(α_1, α_2)，使得当 $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$ 时，有

$$f(u^{1-\alpha} v^{\alpha}) > f^{1-\alpha}(u) \cdot f^{\alpha}(v),$$

且对于 $i=1,2$ 有

$$f(u^{1-\alpha_i}v^{\alpha_i}) = f^{1-\alpha_i}(u)\cdot f^{\alpha_i}(v), \tag{6.12}$$

又显然有 $u^{1-\alpha_1}v^{\alpha_1} < u^{1-\alpha_2}v^{\alpha_2}$，令 $c=u^{1-\alpha_1}v^{\alpha_1}$，$d=u^{1-\alpha_2}v^{\alpha_2}$，则对于 $\alpha\in(\alpha_1,\alpha_2)$，有

$$u^{1-\alpha}v^{\alpha}\cdot f(u^{1-\alpha}v^{\alpha}) > u^{1-\alpha}v^{\alpha}\cdot f^{1-\alpha}(u)\cdot f^{\alpha}(v),$$

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} u^{1-\alpha}v^{\alpha}f(u^{1-\alpha}v^{\alpha})d\alpha > \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} u^{1-\alpha}v^{\alpha}f^{1-\alpha}(u)f^{\alpha}(v)d\alpha,$$

前积分中令 $t=u^{1-\alpha}v^{\alpha}$ 代换，则 $\alpha=\log_{\frac{v}{u}}\frac{t}{u}$，有

$$\frac{1}{\ln\frac{v}{u}}\int_c^d t\cdot f(t)\cdot\frac{1}{t}dt > uf(u)\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left(\frac{vf(v)}{uf(u)}\right)^{\alpha}d\alpha,$$

$$\int_c^d t\cdot f(t)\cdot\frac{1}{t}dt > uf(u)\cdot\ln\frac{v}{u}\cdot\frac{\left(\frac{vf(v)}{uf(u)}\right)^{\alpha_2}-\left(\frac{vf(v)}{uf(u)}\right)^{\alpha_1}}{\ln(vf(v))-\ln(uf(u))},$$

$$\int_c^d f(t)dt > \ln\frac{v}{u}\cdot\frac{(uf(u))^{1-\alpha_2}(vf(v))^{\alpha_2}-(uf(u))^{1-\alpha_1}(vf(v))^{\alpha_1}}{\ln(vf(v))-\ln(uf(u))},$$

把(6.12)式代入上式有

$$\begin{aligned}
\int_c^d f(t)dt &> \ln\frac{v}{u}\cdot\frac{u^{1-\alpha_2}v^{\alpha_2}f(u^{1-\alpha_2}v^{\alpha_2})-u^{1-\alpha_1}v^{\alpha_1}f(u^{1-\alpha_1}v^{\alpha_1})}{\ln(vf(v))-\ln(uf(u))}\\
&= \ln\frac{v}{u}\cdot\frac{df(d)-cf(c)}{\ln(vf(v))-\ln(uf(v))}\\
&= \ln\left(\frac{v}{u}\right)^{\alpha_2-\alpha_1}\cdot\frac{df(d)-cf(c)}{\ln\left(\frac{vf(v)}{uf(u)}\right)^{\alpha_2-\alpha_1}}\\
&= \ln\left(\frac{u^{1-\alpha_2}v^{\alpha_2}}{u^{1-\alpha_1}v^{\alpha_1}}\right)\cdot\frac{df(d)-cf(c)}{\ln\left(\frac{u^{1-\alpha_2}v^{\alpha_2}\cdot f^{1-\alpha_2}(u)\cdot f^{\alpha_2}(v)}{u^{1-\alpha_1}v^{\alpha_1}\cdot f^{1-\alpha_1}(u)\cdot f^{\alpha_1}(v)}\right)}\\
&= \ln\frac{d}{c}\cdot\frac{df(d)-cf(c)}{\ln\left(\frac{d\cdot f(u^{1-\alpha_2}v^{\alpha_2})}{c\cdot f(u^{1-\alpha_1}v^{\alpha_1})}\right)}\\
&= \frac{df(d)-cf(c)}{\ln(df(d))-\ln(cf(c))}\cdot\ln\frac{d}{c}.
\end{aligned}$$

与题设矛盾，结论(ⅰ)成立.

(ⅱ)同理可证，在此略.

附　录

1. 几何凹函数的一个猜想的解决和推广

郑宁国　张小明

本文完全解决文[14]中的一个猜想，并同时对其和对本书第六章的定理2.4进行加强.

引理1　设函数 f 在区间 H 上连续，除有限个点之外，导数存在且非正，则 f 在区间 H 上单调递减.

证明　不妨设 f 在 (a,b) 上连续，在 (a,c) 和 (c,b) 上有 $f'(x)\le 0$，则 f 在 (a,c) 和 (c,b) 上分别单调减少，而且当 $x_1\in(a,c)$，$x_2\in(c,b)$ 时，易知

$$f(x_1)\ge f(c)\ge f(x_2),$$

至此引理1得证.

引理2[2]　设 f 在区间 H 上为连续凹函数，$x_1<x_2<x_3$ 为 H 上的任三点，则

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\ge\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\ge\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

引理3　(ⅰ)可微函数 f 在区间 H 上为连续凹函数的充分必要条件为 $f'(x)$ 为单调递减.

(ⅱ)可微函数 f 在区间 I 上为几何凹函数的充分必要条件为 $\frac{xf'(x)}{f(x)}$ 为单调递减.

结论(ⅰ)可参考文[2]，结论(ⅱ)可由本书第二章的定理3.1和结论(ⅰ)推得.

引理4　对于引理2中的函数 f 和 x_1,x_2,x_3，在平面直角坐标系内，分别设 $(x_1,f(x_1))$，$(x_2,f(x_2))$，$(x_3,f(x_3))$，为 A,B,C 点，

(ⅰ)若再设 f 在 $[x_1,x_3]$ 上的最大值与最小值之差为 ε，则

$$\left|f(x_2)-\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_1)-\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}f(x_3)\right|<2\varepsilon,$$

(ⅱ)存在半径可为任意小的圆，与线段 AB，BC 都相切，且切点位在圆的

上半部分.

(ⅲ)在(ⅱ)中,分别设 AB,BC 上的切点 E,F,曲线 $AFFC$ 所代表的函数为 $g(x)$,则 $g'(x)$ 在 $x_1\leq x\leq x_3$ 上连续;除 E,F 二点之外,$g''(x)$ 存在且非正;$g(x)$ 为凹函数.

证明

(ⅰ) $$\left|f(x_2)-\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_1)-\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}f(x_3)\right|$$

$$\leq |f(x_2)-f(x_1)|+\left|f(x_1)-\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_1)-\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}f(x_3)\right|$$

$$\leq |f(x_2)-f(x_1)|+\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}|f(x_1)-f(x_3)|\leq \varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.$$

(ⅱ)若 A,B,C 三点共线,则命题显然成立.下证 A,B,C 不共线的情形,此时由引理 2 知

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2},\tag{4}$$

设半径 r 为任意小的正数,线段 AB 与 BC 夹角为 α,在 AB,BC 上分别设点 E,F,使 $EB=BF=r\cot\frac{\alpha}{2}$,再分别作 EO 垂直 EB,FO 垂直 BF,交点设为 O,不难验证 O 即为所求的圆的圆心,E,F 为切点.设圆方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$,上半部分圆为 $y=\sqrt{r^2-(x-a)^2}+b$,其中 $a-r<x<a+r$,此时易证 $y''<0$,知其切线的斜率单调递减;下半部分圆为 $y=-\sqrt{r^2-(x-a)^2}+b$,其中 $a-r<x<a+r$,也可易证 $y''>0$,知其切线的斜率单调递增;由(4)式知:圆在 E 点处切线的斜率大于圆在 F 点处切线的斜率,所以 E,F 若位在圆的下半部分上,或 E 位在圆的下半部分上和 F 位在圆的上半部分上,E 位在圆的上半部分上和 F 位在圆的下半部分上,都是不可能的.至此知切点 E,F 位在圆的上半部分.

(ⅲ)设 E,F 的横坐标分别为 x_E,x_F,曲线 $AEFC$ 所代表的函数为 $g(x)$,由圆的切线定义易知 $g(x)$ 在 $x_1\leq x\leq x_3$ 上为可导,且 $g'(x)$ 连续,且在 $x_1<x<x_E$ 上,$g''(x)=0$;在 $x_E<x<x_F$ 上,$g(x)=\sqrt{r^2-(x-a)^2}+b$,$g''(x)<0$,在 $x_F<x<x_3$ 上,$g''(x)=0$;由引理 1 知 $g'(x)$ 在 $x_1\leq x\leq x_3$ 上为单调递减,再由引理 3 知 $g(x)$ 为凹函数,证毕.

引理 5 设 f 在区间 H 上为连续凹函数,则存在满足以上条件的函数列

$\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$,

(ⅰ) $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=f(x)$,

(ⅱ) $f'_n(x)$在区间 H 上存在且连续;除有限个点外,都有 $f''_n(x)\le 0$,且 $f_n(x)$在区间 H 上为凹函数.

证明 不妨设 $H=(-\infty,+\infty)$,任取一自然数 n,f 在$[-n,n]$上为一致连续的凹函数,对于任取充分小的正数 ε_n,存在 $\delta_n>0$,当 $x_1,x_2\in[-n,n]$,$|x_1-x_2|\le\delta_n$ 时,有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\delta_n}{4}$成立,再取自然数 m_n 充分大,使得$\frac{2n}{m_n}\le\delta_n$,取点 $A_{in}\left(-n+\frac{2in}{m},f\left(-n+\frac{2in}{m}\right)\right)$,其中 $i=0,1,\cdots,m$,连结相邻的 A_{in} 得一折线,相邻的折线 $A_{(i-1)n}A_{in}$,$A_{in}A_{(i+1)n}$ 的夹角设为 α_{in}($i=1,2,\cdots,m-1$),仿引理 4 作一圆与 $A_{(i-1)n}A_{in}$,$A_{in}A_{(i+1)n}$ 相切,切点为 B_{in} C_{in},半径 r_{in} 为充分小,使得相邻两圆不相交,切点 $B_{1n},C_{1n},B_{2n},C_{2n},\cdots$,$B_{(m-1)n},C_{(m-1)n}$的横坐标依次增大,且 $r_{in}\cot\frac{\alpha_{in}}{2}<\frac{\varepsilon_n}{4}$和 $r_{in}<\frac{\varepsilon_n}{8}$.

下面来说明 $f_n(x)$的定义,在$(-\infty,B_{1n}]$上,$f_n(x)$为射线 $B_{1n}A_{0n}$,在$[B_{1n},C_{(m-1)n}]$上,$f_n(x)$为曲线 $B_{1n}C_{1n}B_{2n}C_{2n}\cdots B_{(m-1)n}C_{(m-1)n}$,,在$[C_{1n},+\infty)$上,$f_n(x)$为射线 $C_{(m-1)n}A_{mn}$,随着 $n\to+\infty$,$\varepsilon_n\to 0$,相应得到函数 $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

下证(ⅰ),任取 $x\in R$,存在充分大自然 n,使得 $x\in[-n,n]$,若 $x\in[x_{C_{in}},x_{B_{(i+1)n}}]$上,则由 δ_n 和M_n 的定义及引理 4 的(ⅰ)知:

$$|f(x)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon_n}{2};$$

若当 $x\in[x_{B_{in}},x_{C_{in}}]$时,

$$\begin{aligned}|f(x)-f_n(x)|&\le|f(x)-f(x_{A_{in}})|+|f(x_{A_{in}})-f_n(x_{B_{in}})|\\&\quad+|f_n(x_{B_{in}})-f_n(x)|\\&<\frac{\varepsilon_n}{4}+r_{in}\cot\frac{\alpha_{in}}{2}+2r_{in}\le\frac{\varepsilon_n}{4}+\frac{\varepsilon_n}{4}+\frac{\varepsilon_n}{4}=\frac{3\varepsilon_n}{4},\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=f(x)$.至于结论(ⅱ),可由引理 1、引理 3 和引理 4 易推得.

定理 1 设 f 在区间$(a,b)(\subseteq(0,+\infty))$上为几何凹函数,则存在满足以下条件的函数列$\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$,(ⅰ) $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=f(x)$,

（ⅱ）$f'_n(x)$在(a,b)上存在且连续；除有限个点外，都有 $f''_n(x)$存在，且

$$x[f_n(x)f''_n(x)-(f'_n(x))^2]+f_n(x)f'_n(x)\le 0,$$

（ⅲ）$f_n(x)$在区间(a,b)上为几何凹函数.

证明 由本书第二章的定理 3.1 知 $\ln f(e^x)$在$(\ln a,\ln b)$上为凹函数，由引理 5 知存在凹函数列$\{g_n\}_{n=1}^{+\infty}$，使得

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(x)=\ln f(e^x),$$

$g'_n(x)$在区间$(\ln a,\ln b)$上存在且连续；除有限个点上以外，都有

$$g''_n(x)\le 0.$$

设 $f_n(x)=e^{g_n(\ln x)}$，$x\in(a,b)$，$n=1,2,\cdots$，则

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=\lim_{n\to+\infty} e^{g_n(\ln x)}=e^{\ln f(e^{\ln x})}=f(x);$$

且因

$$f'_n(x)=(e^{g_n(\ln x)})'=\frac{1}{x}e^{g_n(\ln x)}g'_n(\ln x),$$

故知 $f'_n(x)$在(a,b)上存在且连续；又当 $x\in(a,b)$时，

$$\ln f_n(x)=g_n(\ln x),$$

故当 $x\in(\ln a,\ln b)$时，

$$\ln f_n(e^x)=g_n(x),$$

所以除有限个点外，当 $x\in(\ln a,\ln b)$时，

$$g''_n(x)=\left(\frac{e^xf'_n(e^x)}{f_n(e^x)}\right)'$$

$$=\frac{[e^xf'_n(e^x)+e^{2x}f''_n(e^x)]f_n(e^x)-(e^xf'_n(e^x))^2}{f_n^2(e^x)}\le 0,$$

$$\Leftrightarrow e^x[f_n(e^x)f''_n(e^x)-(f'_n(e^x))^2]+f_n(e^x)f'_n(e^x)\le 0,$$

所以除有限个点外，当 $x\in(a,b)$时，有

$$x[f_n(x)f''_n(x)-(f'_n(x))^2]+f_n(x)f'_n(x)\le 0$$

成立；由引理 1 和引理 3 的（ⅱ）知 $f_n(x)$为几何凹函数.

定理 2 设 f 在区间$(a,b)(\subseteq(0,+\infty))$上为几何凸函数，则存在满足以下条件的函数列$\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$，

（ⅰ）$\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=f(x)$，

（ⅱ）$f'_n(x)$在(a,b)上存在且连续；除有限个点外，都有 $f''_n(x)$存在，且

$$x[f_n(x)f''_n(x)-(f'_n(x))^2]+f_n(x)f'_n(x)\ge 0,$$

(ⅲ) $f_n(x)$ 在区间 (a,b) 上为几何凸函数.

证明显然同理于定理 1 的证明.

文[14]证明了这样的一个结果:设定义在 $[0,b)$ 上的函数 f 在 $(0,b)$ 上是几何凸函数,那么 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 在 $(0,b)$ 也为几何凸的.并提出了下面一个猜想.

猜想: 设定义在 $[0,b)$ 上的函数 f 在 $(0,b)$ 上是几何凹函数,那么 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 在 $(0,b)$ 也为几何凹函数.

以下的定理 3 不仅解决了这个问题,而且结果明显更强.

定理 3 设定义在 $[a,b)(\subseteq[0,+\infty))$ 上的函数 f 是 (a,b) 上的几何凹函数,则

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

在 (a,b) 上是几何凹函数.

证明 由定理 1 知存在满足定理 1 的几何凹函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$,设 $F_n(x)=\int_a^x f_n(t)dt$,下先证 F_n 在 (a,b) 上是几何凹函数.因 f_n 取值为正,所以 F_n 取值也为正,由第二章的定理 3.1 知只要证对于 $x_0\in(a,b)$,有

$$x_0[f'_n(x_0)\int_a^{x_0}f_n(t)dt-f_n^2(x_0)]+f_n(x_0)\int_a^{x_0}f_n(t)dt\le 0,$$

$$\Leftrightarrow[x_0f'_n(x_0)+f_n(x_0)]\int_a^{x_0}f_n(t)dt\le x_0\cdot f_n^2(x_0).\tag{5}$$

若 $x_0f'_n(x_0)+f_n(x_0)\le 0$,上式已成立;若 $x_0f'_n(x_0)+f_n(x_0)>0$,则

$$\frac{x_0f'_n(x_0)}{f_n(x_0)}>-1,$$

由引理 3 的(ⅱ)知在 $(a,x_0]$ 上,都有

$$xf'_n(x)+f_n(x)>0.$$

在 $(a,x_0]$ 上定义连续函数

$$G_n(x)=\frac{xf_n^2(x)}{xf'_n(x)+f_n(x)}-\int_a^x f_n(t)dt;$$

除有限个点外

$$G'_n=\frac{(f_n^2+2xf_n\cdot f'_n)(xf'_n+f_n)-xf_n^2\cdot(2f'_n+xf''_n)}{(xf'_n+f_n)^2}-f_n$$

$$=-\frac{xf_n(f_n\cdot f'_n-x(f'_n)^2+xf_n\cdot f''_n)}{(xf'_n+f_n)^2}\ge 0,$$

由引理 1 知 G_n 为单调递增，且

$$G_n(a+) = \lim_{x\to a+0}\left(\frac{xf_n^2(x)}{xf'_n(x)+f_n(x)} - \int_a^x f_n(t)\,dt\right) \geq 0,$$

在$(a, x_0]$上，$G_n(x)\geq 0$，(5)式得证，F_n 在(a, b)上是几何凹函数. 又易知 $F_n \to F(n\to+\infty)$，由第二章的定理 3.2 知定理 3 得证.

在引理 4 的证明过程中，得到了成都大学文家金先生的帮助，作者在此真诚地表示感谢.

附　录

2. 有关几何凸函数的几个问题

1. 圆为几何凸集的充分必要条件是什么？即：若设 $a>1, b>1, 0\leq\theta_1, \theta_2\leq\frac{\pi}{2}$，使

$$[a-\sqrt{(a-\cos\theta_1)(a-\cos\theta_2)}]^2 + [b-\sqrt{(b-\sin\theta_1)(b-\sin\theta_2)}]^2\leqslant 1,$$

成立的与 a, b 有关的充要条件是什么？（见第四章第二节）

2. 设 $a\geq\sqrt{2}, 0\leq\theta_1, \theta_2\leq\frac{\pi}{2}$ 用人工思维证明

$$[a-\sqrt{(a-\cos\theta_1)(a-\cos\theta_2)}]^2 + [a-\sqrt{(a-\sin\theta_1)(a-\sin\theta_2)}]^2\leqslant 1,$$

且满足此不等式的 a 的最小值为$\sqrt{2}$.（见第四章第二节）

3. 设函数 f 在(a,b)上为几何凹函数，试给出$\frac{1}{b-a}\int_b^a f(x)dx$ 的一个适合的上界（见第六章第四节）.

4. 设 $0<x, y<\beta$，试比较数 x^y+y^x 与 $2\sqrt{xy}^{\sqrt{xy}}$ 的大小（β 的定义可见第五章第四节）.

5. 设一元四次多项式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$，试用其系数来表示 f 在$(0,+\infty)$上是几何凸函数的充分必要条件.

6. 设 $x_2>x_1>0, n\geq 1, n\in N$，试求 m, n 满足什么充分必要条件时，不等式$[x_2+(n-1)x_1]^{m-1}-\frac{x_2^m-x_1^m}{x_2-x_1}\geq 0$ 对所有满足条件的实数 x_1，x_2 都成立.

7. 设 $a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，$s=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}$，则当 $\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\geq e^{-2}$ 时，有$\prod_{i=1}^n a_i^{a_i}\geq s^{ns}$成立（参考第五章的定理 3.1）；当 $s\geq 1$ 时，有$\prod_{i=1}^n a_i^{a_i}\geq s^{ns}$成立（参考第五章定理 4.1 的证明）. 问能不能找到一个统一的条

件，使得$\prod_{i=1}^{n} a_i^{a_i} \geq s^{ns}$成立.

8. 设 $n\geqslant 3, a_i\geqslant\sqrt{2}r>0, i=1,2,\cdots,n$，猜想超球体$\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^2\leqslant r^2$为几何凸集(参考第四章定理 2.5).
9. 第六章第六节中，有关几何凸(凹)函数的几个积分上下界，分别比较大小的问题.
10. 能否利用几何凸(凹)函数积分上下界(第六章定理 4.2 的前半式除外)，构造一些函数的单调性.

参考文献

[1] D. Smitrinovic, J. Epecaric, A. M. Fink. Classical and New Inequalities in Analysis[M]. The Netherlands: Kluwer Publishers, 1993.

[2] D.S.密特利诺维奇.解析不等式[M],张小萍,王龙译.北京,科学出版社,1987.

[3] Albert W. Marshall, Ingram Olkin. Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications[M]. New York : Academic Press, Inc, 1979.

[4] 王伯英.控制不等式基础[M].北京师范大学出版社,1990.

[5] 匡继昌.常用不等式(第二版)[M].长沙,湖南科技出版社,1993.

[6] 杨路,张景中,侯晓荣.非线性代数方程组与定理机器证明[M].上海科技教育出版社,1996.

[7] 刘保乾.BOTTEMA－我们看见了什么[M].拉萨,西藏人民出版社,2003.

[8] 杨学枝主编.不等式研究[M].拉萨,西藏人民出版社,2000.

[9] 毛羽辉.数学分析选论[M].北京,科学出版社,2003.

[10] 陈公宁.矩阵理论及应用[M].北京师范大学出版社,1990.

[11] 郭大钧.大学数学手册[M].济南,山东科学技术出版社,1985.

[12] 石焕南.控制不等式参考文献[J].不等式研究通讯(中国不等式研究小组主办),2003(1).

[13] 杨路,侯晓荣,曾振柄.多项式的完全判别系统[J].中国科学,1996.

[14] Constantin P. Niculescu. Convexity According to the Geometric Mean . Mathematical Inequalities & Applications .2000(2).

[15] 张承宇. 广义凸函数性质初探[J]. 中学数学, 1998 (4).

[16] 杨定华.关于积凸(凹)函数的几个不等式[J].不等式研究通讯(中国不等式研究小组主办),1998(4).

[17] 李世杰. 广义凸函数定义和性质之我见[J]. 中学数学, 1999(5).

[18] 杨定华.有关积凸函数的一个不等式[C].见:杨学枝主编,不等式研究,拉萨,西藏人民出版社,2000.

[19] 于小平. 谈广义凸函数[Z]. 第四届初等数学研究学术交流会.2000,8.北京.

[20] 沈文选 .广义凸函数的简单性质[J] .中学数学,2000 (12) .

[21] 李世杰. 几何凸函数的若干性质[J]. 数学通讯, 2003 (5).

[22] 单宝良.关于几何凸函数、调和凸函数和平方凸函数[J].中学教研,1999(8).

[23] 杨定华.关于几何凸函数的不等式[J].河北大学学报(自然科学版),2002(22).

[24] 杨定华.关于积凸函数几个不等式的加强[J].不等式研究通讯(中国不等式研究小组主办),1999(2).

[25] 张小明,吴善和.几何凸函数的一个充要条件及其应用[J] .湖南理工学院学报,2003(9).

[26] D. MIHET, An extension of the Inequality of Huygens [J]. Revista Matematica din Timisoara, 1(1990), NO.2.

[27] 李世杰.凸函数 Jensen 不等式的一个推广及其应用[J].抚州师专学报(自然科学辑刊),1988(3).
[28] 杨路,夏时洪.一类构造性几何不等式的机器证明[J].计算机学报,2003(7).
[29] 李世杰.几何凸函数的几个新性质[J].不等式研究通讯(中国不等式研究小组主办),2003(5).
[30] 李世杰.一个加权的母函数不等式[J].中学教研(数学),1991(1).
[31] 张小明.几何凸函数的定义、性质及其应用[P].不等式研究通讯(中国不等式研究小组主办),2003 增刊.
[32] 谭琳,函数札记[M].杭州,浙江大学出版社,1997.
[33] 史济怀.平均[M].北京,科学出版社,2000.
[34] 张晗方.一个初等不等式及其应用[J].数学实践与认识,1986(1).
[35] 邱镜亮.关于齐次多项式函数的 Schur - 凹性[J].北京师范大学学报(自然科学版),1998(3).
[36] 王挽澜,林祖成.加强琴生不等式的一个猜想[J].成都大学学报(自然科学版),1991(4).
[37] 王挽澜.对称函数的一些不等式及其应用[J],宁波大学学报(自然科学版),1995(3).
[38] 席博彦.一类加强不等式的推广[J].工科数学,2001(4).
[39] 杨克昌.平均值不等式的一个证明与加强[J].湖南数学通讯,1986(4).
[40] 冷岗松,唐立华.谈 Pedoe 不等式的高维推广[J].数学学报.1997(40).
[41] 李康海.关于广义对数平均的两个不等式[C].见:杨学枝主编,不等式研究,拉萨,西藏人民出版社.2000.
[42] 陈计,王振.一个分析不等式的证明[J].宁波大学学报(理工版),1992(2).
[43] 陈胜利.均值不等式的加强及逆向[J].数学通讯,2000(17).
[44] Lou Hongwei . HöLDer INEQUALITIES OF MEANS

[J].宁波大学学报(自然科学版),1996(1).
[45] 吴善和,石焕南.一类无理不等式的控制证明[J].首都师范大学学报(自然科学版),2003(3).
[46] J. Matkowski, L^p - like paranorms ,Selected Topics in Functional Equations and iteration Theory[J], Proceedings of the Austrian - Polish seminar, Graz Math. Ber. 316(1992).
[47] Carlos E. Finol and Marek Wojtowicz, Multiplicative Properties of Real Functions with Applications to Classical Functions[J]. Aequationes Math,2000,59(1-2).
[48] L. G. Lucht, Mittelwertungleichungen fur Losungen gewisser Differenzengleichungen[J]. Aequationes Math. 39(1990).
[49] 萧振纲,张志华.n个正数的 Heron 平均[J],岳阳师范学院学报(自然科学版),2001(2).
[50] 吴善和.几何凸函数与琴生不等式[J].数学实践与认识,2004(2).
[51] 钟祥贵.两个新的三角形不等式与应用[J].工科数学,2002,18(5).
[52] 张小明.有关 Gamma 函数的二个不等式[J].不等式研究通讯,2003(5).
[53] 张小明.几何凸函数的几个积分不等式[J].不等式研究通讯,2003(5).
[54] 张小明.有关几何凹函数积分的一个猜想[J].青岛职业技术学院学报,2004(17).
[55] 张小明,李世杰.若干凸函数不等式在几何凸函数中的移植[J].徐州师范大学学报(自然科学版),2004(2).